

0-4

PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore *J. S. NEWTON*, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos
Professore *Lucasiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis *Josephi Streater*. Prostant Vena-
les apud *Sam. Smith* ad insignia Principis *Wallie* in Coemiterio
D. Pauli, aliosq; nonnullos Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

ILLUSTRISSIMÆ
SOCIETATI REGALI

a Serenissimo

REGE CAROLO II.

AD

PHILOSOPHIAM PROMOVENDAM

FUNDATÆ

ET AUSPICIIS

POTENTISSIMI MONARCHÆ

JACOBI II.

FLORENTI

Tractatum hunc humillime D. D. D.

J S NEWTON.

P R Æ F A T I O

A D

L E C T O R E M.

Cum Veteres Mechanicam (uti Author est Pappus) in rerum Naturalium investigatione maxime fecerint, & reventiores, magis formas substantialibus & qualitatibus occultis, Phenomena Naturæ ad leges Mathematicas resocare aggressi sint: Visum est in hoc Tractatu Mathesin excolere quatenus ea ad Philosophiam spectat. Mechanicam vero duplicem Veteres constituerunt: Rationalem quæ per Demonstrationes accurate pro edit, & Practicam. Ad practicam spectant Artes omnes Manuales, a quibus utiq; Mechanica nomen mutuata est. Cum autem Artifices parum accur. se operari soleant, fit ut Mechanica omnis a Geometria ita distinguatur, ut quicquid accuratum sit ad Geometriam referatur, quicquid minus accuratum ad Mechanicam. Attamen errores non sunt Artis sed Artificum. Qui minus accurate operatur, imperfectior est Mechanicus, & si quis accuratissime operari posset, hic foret Mechanicus omnium perfectissimus. Nam & Linearum rectarum & Circulorum descriptiones in quibus Geometria fundatur, ad Mechanicam pertinent. Hæc lin. as describere Geometria non docet sed postulat. Postulat enim ut Tyro easdem accurate describere prius didicerit quam lumen attingat Geometriæ; acin, quomodo per has operationes Problemata solvantur, docet. Rectas & circulos describere Problemata sunt sed non Geometrica. Ex Mechanica postulatur horum solutio, in Geometria docetur solutorum usus. At gloriatur Geometria quod tam paucis principiis aliunde petitis tam multa præbet. Fundatur igitur Geometria in praxi Mechanica, & nihil aliud est quam Mechanicæ universalis pars illa quæ artem mensurandi accurate proponit ac demonstrat. Cum autem artes Manuales in corporibus movendis præcipue versentur, fit ut Geometria ad magnitudinem, Mechanica ad motum vulgo referatur. Quo sensu Mechanica rationalis erit Scientia Motuum qui ex viribus quibuscunq; resultant, & virium quæ ad motus quoscunq; requiruntur, accurate proposita ac demonstrata. Pars hæc Mechanicæ a Veteribus in Potentiis quinque ad artes manuales spectantibus excolta fuit, qui Gravitatem (cum potentia manualis non sit) vix aliter quam in ponderibus per potentias illas movendis consueverant. Nos autem non Artibus sed Philosophia consulentes, acq; potentias non manuales sed naturales scribentes, ea maxime tractamus quæ ad Gravitatem, levitatem, vim Elasticam, resisten-
tiam

Praefatio ad Lectorem.

nam Fluidorum & ejusmodi vires seu attractivas seu impulsivas spectant: Et ea propter haec nostra tanquam Philosophiae principia Mathematica proponimus. Omnis enim Philosophia difficultat in eo versari videtur, ut a Phenomenis motuum investigemus vires Naturae, deinde ab his viribus demonstremus phenomena reliqua. Et haec spectant Propositiones generales quae Libro primo & secundo pertractavimus. In Libro autem tertio exemplum hujus rei proposuimus per explicationem Systematis mundani. Ita enim, ex phenomenis caelestibus, per Propositiones in Libro prioribus Mathematicè demonstratas, derivantur vires gravitatis quibus corpora ad Solem & Planetas singulos tendunt. Deinde ex his viribus per Propositiones etiam Mathematicas deducuntur motus Planetarum, Cometarum, Luna & Maris. Utinam cetera Naturae phenomena ex principis Mechanicis eodem argumentandi genere derivare liceret. Nam multa me movent ut nunquid suspicer ea omnia ex viribus quibusdam pendere posse, quibus corporum particula per causas nondum cognitae vel in se mutuo impelluntur & secundum figuras regulares cohaerent, vel ab invicem fugantur & recedunt: quibus viribus ignotis, Philosophi hactenus Naturam frustra tentarunt. Spero autem quod vel huius Philosophandi modo, vel veriori alicui, Principia hic posita lucem aliquam praebeant.

In his edendis, Vir acutissimus & in omni literarum genere eruditissimus Edmundus Halley operam navavit, nec solum Typothetarum Sphalmata correxit & Schemata incidit curavit, sed etiam Author fuit ut horum editionem aggrederetur. Quippe cum demonstratum a me figuram Orbium caelestium impetraverat, rogare non desistit ut eadem cum Societate Regali communicarem, Qua deinde hortatibus & benignis suis auspiciis effecit ut de eadem in lucem emittenda cogitare inciperem. At postquam Motuum Lunarum inaequalitates aggressus essem, deinde etiam alia tentare coepissem quae ad leges & mensuras Gravitatis & aliarum virium, ad figuras a corporibus secundum datas quasvisque leges attractio describendas, ad motus corporum plurium inter se, ad motus corporum in Medium resistentibus, ad vires, densitates & motus Meteorum, ad Orbes Cometarum & similia spectant, editionem in aliud tempus differendam esse putavi, ut cetera revivarer & una in publicum darem. Quae ad motus Lunares spectant, (imperfecta cum sint,) in Corollariis Propositionis LXVI. simul complexus sum, ne singula methodo prolixiore quam pro rei dignitate proponere, & sigillatim demonstrare tenerer, & seriem reliquarum Propositionum interrumpere. Nonnulla sero inventis locis minus idoneis inferere malui, quam numerum Propositionum & citationes mutare. Ut omnia candidè legantur, & desellat, in materia tam difficili non tam reprehendantur, quam novis Lectorum conatibus investigentur, & benigne suppleantur, cuius rogo.

I N
VIRI PRÆSTANTISSIMI
D. ISAACI NEWTONI
OPUS HOCCE
MATHEMATICO-PHYSICUM

Sæculi Gentisque nostra Decus egregium.

EN tibi norma Poli, & divæ libramina Molis,
Computus atque Jovis; quas, dum primordia rerum
Pangeret, omniparens Leges violare Creator
Noluit, æternique operis fundamina fixit.
Intima panduntur vincti penetralia cæli,
Nec latet extremos quæ Vis circumrotat Orbes.
Sol solio residens ad se jubet omnia pronò
Tendere descensu, nec recto tramite currus
Sidereos patitur vastum per inane moveri;
Sed rapit immotis, se centro, singula Gyris.
Jam patet horridicis quæ sit via flexa Cometis;
Jam non miramur barbati Phænomena Astrî.
Discimus hinc tandem qua causa argentea Phœbe
Passibus haud æquis graditur; cur subdita nulli
Hactenus Astronomo numerorum fraena recuset;
Cur remeant Nodi, curque Auges progrediuntur.
Discimus & quantis ressum vaga Cynthia Pontum
Viribus impellit, dum fractis fluctibus Ulvam

Deserit

Deferit, ac Nautis suspectas nudat arenas;
Alternis vicibus suprema ad littora pulsans.
Quæ toties animos veterum torserè Sophorum,
Quæque Scholas frustra rauco certamine vexant
Obvia conspiciamus nubem pellente Mathesi.
Jam dubios nulla caligine prægravat error
Quæis Superum penetrare domos atque ardua Cæli
Scandere sublimis Genii concessit æcumen.

Surgite Mortales, terrenas mittite curas
Atque hinc cæligenæ vires dignoscite Mentis
A pecudum vita longe lateque remotæ.
Qui scriptis iussit Tabulis compescere Cades
Furta & Adulteria, & perjuræ crimina Fraudis;
Quive vagis populis circumdare mœnibus Urbes
Autor erat; Cererisve beavit munere gentes;
Vel qui curarum lenimen pressit ab Uva;
Vel qui Nilivæ monstravit arundine pictos
Conlociare sonos, oculisque exponere Voces;
Humanam sortem minus exulit; utpote pauca
Respiciens miseræ solummodo commoda vitæ.
Jam vero Superis convivæ admittimur, alii
Jura poli tractare licet, jamque abdita cœcæ
Claustra patent Terræ, rerumque immobilis ordo,
Et quæ præteriti latuerunt sæcula mundi.

Talia monstrantem mecum celebrate Camænis,
Vos qui cælesti gaudetis nectare vesci,
NEWTONUM clausi referantem scrinia Veri,
NEWTONUM Musis charum, cui pectore puro
Phœbus adest, totoque incessit Numine mentem:
Nec fas est propius Mortali attingere Divos.

EDM. HALLEY.

PHILO.

PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
Principia
MATHEMATICA

Definitiones.

Def. I.

Quantitas Materiae est mensura ejusdem orta ex illius Densitate & Magnitudine conjunctim.

A Er duplo densior in duplo spatio quadruplus est. Idem intellige de Nive et Pulveribus per compressionem vel liquefactionem condensatis. Et par est ratio corporum omnium, quæ per causas quascunq; diversimode condensantur. Mediâ interea, si quod fuerit, interstitia partium libere pervadentis, hic nullam rationem habeo. Hanc autem quantitatem sub nomine corporis vel Massæ in sequentibus passim intelligo. Innotescit ea per corporis cuiusq; pondus. Nam ponderi proportionalem esse reperi per experimenta pendulorum accuratissime instituta, uti posthac docebitur.

B

Def.

Def. II.

Quantitas motus est mensura ejusdem orta ex Velocitate et quantitate Materie conjunctum.

Motus totius est summa motuum in partibus singulis, adeoque in corpore duplo majore aequali cum Velocitate duplex est, et dupla cum Velocitate quadruplus.

Def. III.

Materia vis insita est potentia resistendi, qua corpus unumquodque, quantum in se est, perseverat in statu suo vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.

Hæc semper proportionalis est suo corpori, neque differt quicquam ab inertia Massa, nisi in modo concipiendi. Per inertiam materię fit ut corpus omne de statu suo vel quiescendi vel movendi difficulter deturbetur. Unde etiam vis insita nomine significantissimo vis inertię dici possit. Exercet vero corpus hanc vim solummodo in mutatione status sui per vim aliam in se impressam facta, estque exercitium ejus sub diverso respectu et Resistentiā et Imperus; Resistentiā quatenus corpus ad conservandum statum suum reluctatur vi impressę; Imperus quatenus corpus idem, vi resistentis obstaculi difficulter cedendo, conatur statum ejus mutare. Vulgus Resistentiā quiescentibus et Imperum moventibus tribuit; sed motus et quies, uti vulgo concipiuntur, respectu solo distinguuntur ab invicem, neque semper vere quiescunt quę vulgo tanquam quiescentia spectantur.

Def. IV.

Vis impressa est actio in corpus exercita, ad mutandum ejus statum vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.

Consistit hæc vis in actione sola, neque post actionem permanet in corpore. Perseverat enim corpus in statu omni novo per solam vim

[3]

vis inertiz. Est autem vis impreſſa diverſarum originum, ut ex iſto, expreſſione, ex vi centripeta.

Def. V.

Vis centripeta eſt qua corpus verſus punctum aliquod tanquam ad centrum abitur, impellitur, vel utitur, tendit.

Huius generis eſt gravitas, qua corpus tendit ad centrum Terre: Vis magnetica, qua ferrum petit centrum Magnetis, et vis illa, quæcunq; ſit, qua Planetæ perpetuo retrahuntur a motibus rectilinis, et in lineis curvis revolvî coguntur. Eſt autem vis centripetæ quantitas trium generum, abſoluta, acceleratrix et motrix.

Def. VI.

Vis centripetæ quantitas abſoluta eſt meſura eiſdem major vel minor pro eſſu acta eandem eandem propigantis a centro per regiones in circuitu.

Uti virtus Magnetica major in uno magnete, minor in alio.

Def. VII.

Vis centripetæ quantitas acceleratrix eſt ipſius meſura Velocitatis proportionalis, quam dato tempore generat.

Uti Virtus Magnetis eundem major in maiori Diſtantiâ, minor in maiori vel v. gravitas major in Vallibus, minor in caceminibus præaltiſſorum montium (ut ex experimento pendulorum conſtat) atq; adhuc minor (ut poſthac patebit) in maioriſſis diſtantiis a Terra, in æqualibus autem datantibus eandem andq; propterea quod corpora omnia cadentia (gravia an levia, magna an parva) ſublata Aeris reſiſtentiâ, æqualiter accelerat.

Def. VIII.

Vis centripetæ quantitas motrix eſt ipſius meſura proportionalis motui, quem dato tempore generat.

Uti pondus majus in maiori corpore, minus in minore; inq; cor-

pore eodem minus prope terram, minus in caelis. Hæc vis est corporum coarctans & attrahentia seu propensio in centrum & (ut ita dicam) acceleratrix & motrix, & impetretur semper per vim ipsi contrariam & æqualem, quæ deicentibus corpori impediri potest.

Et hæc vim quantitates brevitatis gratia nominare licet vires acceleratrices & motrices, & distinctionis gratia referre ad corpora, ad corporum loca, & ad centrum virium. Nuncium vim motricem ad corpus tanquam conatum & propensionem totius in centrum, ex propensionibus omnium partium compositum, & vim acceleratricem ad locum corporis, tanquam efficaciam quandam, de centro per loca singula in circuitu ductam, ad movenda corpora quæ in ipsi sunt, vim autem absolutam ad centrum, tanquam causam aliquam præditam, sine qua vires motrices non propagantur per regiones in circuitu, siue causa illa sit corpus aliquid centrale (quale est Magnes in centro vis Magnetica vel Terra in centro vis gravitanti) siue alia aliqua quæ non apparet Mathematicus saltem est hæc conceptus. Nam vim causam & sedes phisicas jam non expendo.

Est igitur vis acceleratrix ad vim motricem ut celeritas ad motum. Oritur enim quantitas motus ex celeritate ducta in quantitatem Materie, & vis motrix ex vi acceleratrice ducta in quantitatem eundem materie. Nam summa actionum vis acceleratrix in singula corporis particulas est vi motrix totius. Unde iuxta Superficiem Terræ, ubi gravitas acceleratrix seu vi gravitans in corporibus universis eadem est, gravitas motrix seu pondus est de corpus at si in regiones ascendatur ubi gravitas acceleratrix fit minor, pondus pariter minuetur, eritq; semper ut corpus in gravitatem acceleratricem ductum. Sic in regionibus ubi gravitas acceleratrix duplo minor est, pondus corpori duplo vel triplo minoris erit quadruplo vel sextuplo minus.

Porro attractiones et impulsus eodem sensu acceleratrices & motrices nominabo. Vocem autem attractionis, impulsus vel propensionis cuiuscumq; in centrum, indifferenter et pro se mutuo promittue turpo, has vires non phisice sed Mathematicæ tantum considerando

rando. Unde caveat lector ne per huiusmodi voces cogitet me speciem vel modum actionis causamve aut rationem physicam alicubi definire, vel centris (quæ sunt puncta Mathematica) vires vere et physica tribuere, si forte aut centra trahere, aut vires centrorum esse dixerit.

S. bolton.

Hactenus voces minus notas, quo in sensu in sequentibus accipiendæ sunt, explicare vitum est. Nam tempus, spatium, locum et motum ut omnibus notissima non desino. Dicam tamen quod vulgus quantitates hæc non aliter quam ex relatione ad sensibilia concepit. Et inde oriuntur præiudicia quædam, quibus tollendis converat eandem in absolutas & relativas, veras & apparentes, Mathematicas et vulgares distinguere.

I. Tempus absolutum verum & Mathematicum, in se & natura sua absq. relatione ad externum quodvis, æquabiliter fluit, abq. nomine dicitur Duratio, relativum apparet & vulgare est sensibilibus & externa quævis Durationis per motum mensura, (seu accurata seu inæquabili) qua vulgus vice veri temporis utitur, ut Hora, Dies, Mensis, Annus.

II. Spatium absolutum natura sua absq. relatione ad externum quodvis temper manet simile & immobile, relativum est spatii huius mensura seu dimensio quælibet mobilis, quæ a sensibus nostris per situm suum ad corpora definitur, & a vulgo pro spatio immobili usurpatur ut dimensio spatii subterranei, ærei vel celestis definita per situm suum ad Terram. Idem sunt spatium absolutum & relativum, specie & magnitudine, sed non permanent idem semper numero. Nam si Terra, verbi gratia, moveretur, spatium Aeris nostri quod relative & respectu Terræ semper manet idem, nunc erit una pars spatii absoluti in quam Aer transit, nunc alia pars eius, & sic absolute mutabitur perpetuo.

III. Locus est pars spatii quam corpus occupat, estq. pro ratione

tionem spatii vel absolutus vel relativus. Partem dico spatii, non finem corporis vel terminum ambientem. Nam solidorum æqualium æquales ætemper sunt loci, Superficie autem ob dissimilitudinem figurarum ut plurimum inæquales sunt, sius vero proprie loquendo quantitatem non habent, neq. tam sunt loca quam affectiones locorum. Motus totius idem est cum summa motuum partium, hoc est, translatio totius de ipsius loco eadem cum summa translationum partium de locis suis, adeoq. locus totius idem cum summa locorum partium, & propterea internus & in corpore toto.

IV. Motus absolutus est translatio corporis de loco absoluto in locum absolutum, relativus de relativo in relativum. Sic in Navi qua velis palis fertur, relativus corporis locus est navis regio illa in qua corpus vertitur, seu cavitatis totius pars illa quam corpus impiet, quæq. adeo movetur una cum Navi & Quies relativa est permutatio corporis in eadem illa navis regione vel parte cavitatis. At Quies vera est permutatio corporis in eadem parte spatii illius immoti in qua Navis ipsa una cum cavitata sua & contentis universis movetur. Unde si Terra vere quæscit, corpus quod relative quæscit in Navi, movebitur vere et absolute ea cum Velocitate qua Navis movetur in Terra. Sin Terra etiam movetur, orietur verus et absolutus corporis motus partim ex Terræ motu vero in spatio immoto, partim ex Navi motu relativo in Terra et si corpus etiam moveatur relative in Navi orietur verus eius motus partim ex vero motu Terræ in spatio immoto, partim ex relativis motibus in Navi in Terra, tum ex corpore in Navi, et ex his motibus relativis orietur corporis motus relativus in Terra. Ut si Terræ pars illa ubi Navis vertitur moveatur vere in Orientem, cum Velocitate partium 1000, et velis ventusq. feratur Navis in Occidentem cum Velocitate partium decem, Nauta autem ambulet in Navi Orientem versus, cum Velocitatis parte una, movebitur Nauta vere et absolute in spatio immoto cum Velocitatis partibus 1000 in Orientem, et relative in Terra Occidentem versus cum Velocitatis partibus novem.

Tempus

Tempus absolutum a relativo distinguitur in Astronomia per Aequationem Temporis vulgi. In quales enim sunt dies Naturales, qui vulgo tanquam aequales pro Mensura Temporis habentur. Hinc inaequalitatem corrigunt Astronomi ut ex veriore Tempore mentirentur motus caelestes. Possibile est ut nullus sit motus a quolibet quo Tempus accurate mensuretur. Accelerari & retardari possunt motus omnes, sed fluxus Temporis absoluti mutari nequit. Eadem est duratio seu perseverantia existentiae rerum, siue motus sit celeres, siue tardi, siue nulli, promde hae a mentis tuis sensibus merito distinguuntur, & ex eadem colligitur per Aequationem Astronomicam. Hujus autem aequationis in determinandis Phenomenis necessitas, tum per experimentum Horologii oscillatorii, tum etiam per Eclipses Satellitum Jovis evincitur.

Ut partium Temporis ordo est immutabilis, sic etiam ordo partium Spatii. Moveantur haec de locis suis, & movebuntur (ut ita dicam) de seipsis. Nam Tempora & Spatia sunt simpliciorum & rerum omnium quasi loca. In Tempore quoad ordinem successione, in Spatio quoad ordinem situs locantur universa. De illorum Essentia est ut sint loca, & loca primaria moveri absurdum est. Haec sunt igitur absoluta loca, & sola translationes de his locis sunt absoluti motus.

Verum quoniam haec spatii partes videri nequeunt, & ab invicem per sensus nostros distingui, earum vice adhaecimus menturas sensibiles. Ex positionibus enim & distantis rerum a corpore aliquo, quod spectamus ut immobile, determinamus loca universa, deinde etiam & omnes motus determinamus cum respectu ad praedicta loca, quatenus corpora ab eadem transiri concipimus. Sic vice locorum & motuum absolutorum relativi utimur, nec incommode in rebus humanis in Philosophia etiam abstrahendum est a sensibus. Inter ceterum potest ut nullum revera quiescat corpus, ad quod loca motusq; referantur.

Diligenter autem Quies & Motus absoluti & relativi ab invicem per eorum proprietates, causas & effectus. Quibus propria

est quod corpora vere quiescentia quiescunt inter se. Ideoque, cum possibile sit ut corpus aliquod in regionibus fixarum, aut longe ut *in* quiescat absolute, sciri autem non possit ex situ corporum ac invicem in regionibus nostris, utrum horum aliquod ad longinquum illud datam positionem servet, quies vera ex horum situ inter se definiti nequit.

Motus proprietas est, quod partes quæ datas servant positiones ad tota participant motus eorundem totorum. Nam gyrationum partes omnes conantur recedere de axe motus, et progredientium impetus oritur ex conando impetu partium singularum. Igitur motus corporibus ambientibus, moventur quæ in ambientibus relative quiescunt. Et propterea motus verus et absolutus definiti nequit per translationem e vicinia corporum, quæ tanquam quiescentia spectantur. Debent corpora externa non solum tanquam quiescentia spectari, sed etiam vere quiescere. Alioquin inclusa omnia præter translationem e vicinia ambientium, participabunt etiam ambientium motus veros, et sublata illa translatione non vere quiescant, sed tanquam quiescentia solummodo spectabuntur, sicut etiam ambientia ad inclusa ut tota pars exterior ad partem internam, vel ut cortex ad nucleum. Moto autem cortice, nuclea etiam, absq. translatione de vicinia corticis, cum pars totus, moventur.

Præcedenti proprietati affinis est, quod moto loco movetur una locorum, adeoque corpus, quod de loco moto movetur, participat etiam loci sui motum. Igitur motus omnes, qui de locis motis sunt, sunt partes solummodo motuum integrorum et absolutorum, et motus omnis integer componitur ex motu corporis de loco suo primo, et motu loci huius de loco suo, et sic dumceps, u. q. dum perveniamus ad locum immotum, ut in exemplo Nautæ præmemorato. Unde motus integri et absoluti non solum per loca immota deumiri possunt, et propterea hos ad loca immota, relativi ad nuclea ita præterea. Loca autem immota non solum, sed quæ omnia ab antiquo in infinitum datas servant

vant positiones ad invicem, atq; adeo semper manent immotæ, spatiumq; constituunt quod immobile appello.

Causæ, quibus motus verus et relativity distinguuntur ab invicem, sunt vires in corpora impressæ ad motum generandum. Motus verus nec generatur nec mutatur nisi per vires in ipsum corpus motum impressas : at motus relativity generari et mutari potest absq; viribus impressis in hoc corpus. Sufficit enim ut imprimantur in alia solum corpora ad quæ sit relatio, ut ipsæ cedentibus mutetur relatio illa in qua huius quies vel motus relativity consistit. Rursus motus verus a viribus in corpus motum impressis semper mutatur, at motus relativity ab his viribus non mutatur necessario. Nam si eadem vires in alia etiam corpora, ad quæ sit relatio, sic imprimantur ut situs relativity conservetur, conservabitur relatio in qua motus relativity consistit. Mutari igitur potest motus omnis relativity ubi verus conservatur, et conservari ubi verus mutatur, et propterea motus verus in eamodi relationibus remanere consistit.

Effectus quibus motus absolutus et relativity distinguuntur ab invicem, sunt vires recedendi ab axe motus circularis. Nam in motu circulari nude relativo hæ vires nullæ sunt, in vero autem et absoluto majores vel minores pro quantitate motus. Si pendat vitula a filo prælongo, agaturq; perpetuo in orbem donec filum a contritione admodum rigeat, dein impleatur aqua, et una cum aqua quiescat, tunc vi aliqua subitanea agatur motu contrario in orbem, et filo se relaxante, vitulus perrevertet in hoc motu. Si peritæ aquæ tabulatio plana erit, quemadmodum ante motum vasis, at postquam vi inaquam paulatim impressa, effusa, ut vas quoque sciat sibi iter revolvit incipiat, recedet ipsa paulatim ex medio, accedetq; ad latera vasis, tum nunc concavata erit diem. (ut ipse exper-tus sum) et involutione semper motu ascendet magis & magis, donec revolutiones in æqualibus cum vasa tempore peractæ, quiescat in eodem relativo. Indicat hic æternus conatus recedendi ab axe motu, & per tale incrementum innotescit & mensuratur motus aquæ circularis verus & absolutus, motusq; rectus hic

omnino contrarius. Immo ubi maximus erat aquæ motus relativus in v. r., nota ille nullum exarabat eorum recedendi ab axe. Ac, si non petebat circumire, nam accedendo ad Jitæ a vñs, sed periret, & propterea motus illa circularis veras, eorum dum inciperet. Iamque veritas præ motu relatu is decrevit, utens s. eius ad latera vñs undabitur conatim recedendi ab axe, atq. hic conatus non strabit motum illud circ. litem verum perpetuo circ. t. r. n., & eadem maxime ætatem ubi aqua quæcebit in vñe relatu. Iamque conatus ille non pendet a translatione aquæ respectu p. r. m. in hunc, & propterea motus circularis veras per talis est nil motu definit nequit. Unus est comp. r. s. a. i. utq. re. olenti motus vere circularis conatu unico tanquam p. r. o. j. & a. h. q. u. o. eff. c. u. r. e. p. o. n. d. e. r. s. motu autem relatu p. r. o. v. a. r. i. r. e. l. a. t. i. o. n. i. s. a. d. e. x. t. e. r. n. a. i. n. n. a. m. e. r. i. t. i. a. n. t., & relationi n. i. s. t. a. r. e. c. i. f. i. c. i. b. u. s. v. e. r. i. n. o. m. i. n. o. d. e. l. i. m. i. t. a. n. t. u. r., n. i. i. q. u. a. t. e. n. u. s. d. e. v. e. r. o. i. l. l. o. & n. i. i. c. o. m. o. t. u. p. a. r. t. e. p. a. r. t. e. Unde & in systemate eorum qui Cælos nostros intra Cælo fixarum in orbem revolvunt, & Planeta secum deferunt. Planeta & Insula Cælorum partes, q. u. i. r. e. l. a. t. i. v. e. q. u. i. d. e. m. i. n. Cælo, s. p. r. o. x. i. m. i. s. q. u. i. e. s. c. i. u. n. t., m. o. v. e. n. t. u. r. v. e. r. e. Mutant enim positionem illa ad vicem (re. l. a. t. i. o. n. e. m. q. u. a. n. t. i. t. u. i. n. v. e. r. e. q. u. i. c. e. n. t. i. b. u. s.) n. o. n. p. e. r. i. m. e. a. d. h. i. c. p. a. r. t. i. c. i. p. a. n. t. e. o. r. u. m. m. o. t. u. s., & u. t. p. a. r. t. e. s. r. e. v. o. l. v. e. n. t. u. r. i. n. t. o. t. o. r. u. m., a. b. e. o. r. u. m. a. x. i. b. u. s. r. e. c. e. d. e. r. e. c. o. n. a. n. t. u. r.

Iamque quantitates relative non sunt et ipsæ quantitates quarum nomina per se ferunt sed earum mentura, & sententia (vera autem ratione p. r. o. p. r. i. a. d. i. c. t. o. m. e. n. t. u. r. a. m. u. n. i. u. s.) Atq. ex his de- m. e. n. t. u. r. i. s. u. n. t. v. e. r. e. s. n. o. n. s. i. g. n. i. f. i. c. a. n. t. e. s., p. e. r. n. o. m. i. n. a. i. l. l. a. T. e. m. p. o. r. e., S. p. a. t. i. o., L. o. c. u. s. & M. o. t. u. p. r. o. p. r. i. e. i. n. t. e. l. l. e. n. d. u. e. r. u. n. t. h. a. m. e. n. t. u. r. a. ; & e. r. u. n. t. a. m. o. l. i. & p. a. r. t. e. M. a. t. h. e. m. a. t. i. c. e. s. i. q. u. a. n. t. i. t. a. t. e. s. m. e. n. t. u. r. a. t. a. h. i. c. e. o. n. t. e. l. i. a. n. t. u. r. P. r. o. i. n. d. e. v. i. n. i. n. t. e. r. u. n. t. S. a. c. r. i. s. l. i. t. e. r. i. s. q. u. i. v. o. c. e. s. h. i. c. d. e. q. u. a. n. t. i. t. a. t. i. b. u. s. m. e. m. o. r. a. t. i. s. i. l. l. i. i. n. t. e. r. p. r. e. t. a. n. t. u. r. N. e. q. u. i. d. e. m. c. o. n. t. a. m. i. n. a. n. t. M. a. t. h. e. m. & P. h. i. l. o. s. o. p. h. i. a. m. q. u. i. q. u. a. n. t. i. t. a. t. e. s. v. e. r. a. s. e. x. a. p. p. o. s. u. n. t. r. e. l. i. g. i. o. n. i. b. u. s. & v. u. l. g. a. r. i. b. u. s. n. a. n. s. u. r. i. s. c. o. n. t. a. n. d. u. n. t.

Motus quidem veros corporum singulorum cognoscere, & ab apparentibus actu discernere, difficillimum est, propterea quod partes (partes) illius immobilis in quo corpora vere moventur, non incurrunt in sensus. Causa tamen non est proius desperata. Nam suppetant argumenta partim ex moribus apparentibus, quæ tantum motuum verorum differentias, partim ex variis quæ sunt motuum verorum causis & effectibus. Ut si globi duo ad datam a iuxta distantiam sibi intercedente connecti, revolverentur circa commune gravitatis centrum, innotesceret ex tamis a filicoratis globorum recedendi ab axe motus, & inde quantitas motus circularis computari posset. Deinde si vires quolibet æquales in alteris globorum facies ad motum circulaem agendam vel minus æquæ simul imprimerentur, innotesceret ex aucta vel diminuta sibi ratione argumentum vel decrementum motus, & inde tandem inveniri possent facies globorum in quas vires imprimi deberent ut motus maxime augeretur, id est facies posita, siue quæ in motu circulari sequantur. Cognitis autem facibus quæ sequuntur & facibus oppositis quæ præcedunt, cognosceret in determinatio motus. In hac enim in materia posset & quantitas & determinatio motus huius circularis in vacuo quovis maximo, ubi nihil extaret externum & sensibile, quicquam globi concerni posset. Si jam constatarentur in spatio illo corpora aliqua longè aqua distant inter se posita aperte vacua, quædam autem sic fixa in regionibus nostris huius quidem non posset ex relativa globorum translatione inter corpora, verum latere an illis tubendus erat motus. At si attendere ad solum & incurrere temporem cuiusnam partem esse quædam motus globorum requireret, concludere liceret motum esse globorum, & cum motum ex translatione globorum inter corpora, determinationem huius motus colligere. Motus autem veros ex eorum causis, effectibus & apparentibus differentiis colligere, & contra, ex moribus seu veris seu apparentibus, eorum causis & effectibus, doceretur tam in æquationibus. Hunc enim in finem Tractatum sequentem composui.

AXIOMATA SIVE LEGES MOTUS

Lex. I.

Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.

Projectilia perseverant in motibus suis nisi quatenus a resistentia aeris retardantur & vi gravitatis impelluntur deorsum. Trochus, cuius partes cohaerendo perpetuo retrahunt sese a motibus rectilineis, non cessat rotari nisi quatenus ab aere retardatur. Majora autem Planetarum & Cometarum corpora motus suos & progressivos & circulares in spatii minus resistentibus factos conservant diutius.

Lex. II.

Mutationem motus proportionalem esse et motui impressae, & fieri secundum lineam rectam qua est illa impressio.

Si vis aliquid motum quemvis generet, dupla duplum, tripla tripulum generabit sive simul & semel, sive gradatim & successive impressa fuerit. Et hoc motus quoniam in eandem semper plagam cum vi generat nec terminatur, si corpus antea movebatur, motu recto vel contra additur vel contrario subducitur, vel obliquo oblique additur, & cum eo secundum utriusque determinationem componitur.

Lex. III.

[13]
Lex. III.

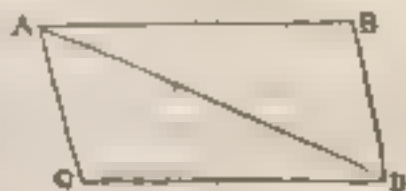
*Actiōi contrariam semper & æqualem esse reactionem : siue corporum
duorum actiōes in se mutuo semper esse æquales & in partes contra-
rias dirigi.*

Quicquid premit vel trahit alterum, tantundem ab eo premitur
vel trahitur. Supra lapidem digito premit, premitur & huius
digitus a lapide. Si equi lapidem funi alligatum trahit, retrahetur
etiam & equus equaliter in lapidem: nam tumis utrinque, distantias
eodem relaxandi se conatu urgebit Equum versus lapidem, ac la-
pidem versus equum, tantumque impediet progressum unius quan-
tum promovet progressum alterius. Si corpus aliquod in corpus
aliud impingens, motum ejus vi sua quomocunque mutaverit, i-
dem quoque vicissim in motu proprio eandem mutationem in par-
tem contrariam vi alterius (ob æqualitatem pressionis mutua)
faciet. His æquales sunt mutationes non velocitatum
sed motuum, (scilicet in corporibus non aliunde impeditis) Mu-
tationes enim velocitatum, in contrarias idem partes læta, quia
motus equaliter mutantur, sunt corporibus reciproce proportio-
nales.

Corol. I.

*Corpus viribus conjunctis diagonalem per Allevantium eodem tempore
describere, quo latera separatis*

Si corpus dato tempore, vi sola M,
ferretur ab A ad B, & vi sola N, ab
A ad C, compleatur parallelogram-
mum ABDC, & vi utraq feretur ad
eodem tempore ab A ad D. Nam



quoniam vis N agit secundum lineam
AC ipsi BD paralelam, hæc vis nihil mutabit velocitatem acce-
dendi ad lineam illam BD a vi altera genitam. Accedet igitur
corpus eodem tempore ad lineam BD siue vis N imprimatur, siue
non, atq; adeo in fine illius temporis reperietur alicubi in linea
illa

inter componi solent, ut & vires Nervorum ad animalium ossa movenda

Corol. III.

Quantitas motus præcellente capiendo summam motuum factorum ad eandem partem, & differentiam factorum ad contrarias, non mutatur ab actione corporum inter se.

Item actio et contraria reactio æquales sunt per Legem 3, adeoque per legem 2, æquale in motibus efficiunt mutationes versus contrarias partes. Ergo si motus sunt ad eandem partem, quicquid additur motui corporis fugientis subducetur motui corporis insequentis scilicet, ut summa maneat eadem quæ prius. Sin corpora obviam eant, æquale erit additio de motu utriusque, adeoque differentia motuum factorum in contrarias partes manebit eadem.

Ut si corpus sphaericum *A* sit triplo majus corpore sphaerico *B*, habeatque duas velocitatis partes, et *B* sequatur in eadem recta cum velocitatis partibus decem, adeoque motus ipsius *A* sit ad motum ipsius *B* ut sex ad decem ponantur motus illis esse partium sex & decem, & summa erit partium sexdecim. In corporum igitur concursu, si corpus *A* lucretur motus partes tres vel quatuor vel quinque corpus *B* amitteret partes totidem, adeoque perget corpus *A* post reflexionem cum partibus novem vel decem vel undecim, & *B* cum partibus septem vel sex vel quinque existente semper summa partium sexdecim ut prius. Sin corpus *A* lucretur partes novem vel decem vel undecim vel duodecim, adeoque progreditur postconcursum cum partibus quindecim vel sexdecim vel septendecim vel octodecim corpus *B* amittendo, tot partes quot *A* lucretur, vel progreditur eamdem partem, aut illis partibus novem, vel quælibet amisso motu suo progressivo partium decem, vel regreditur cum una parte amisso motu suo & (ut ita dicam) una parte amplius, vel regreditur cum partibus duabus obdetractionem motum progressivum partium duodecim. Atque ita summa motuum concurrentium $15 + 1$ vel $16 + 0$ differentie contrario-

dens vel quiescet vel progredietur uniformiter in linea arcua. Hoc
propterea demonstratum est in xxii demonstratur in plano, & eadem ratio-
ne potest in hoc solidis. Et si corpora quiescent, mo-
ventur vel committentur in lineis rectis, continetur etiam unum gravitas
in eis, vel quiescent, vel progredietur vel progredietur in eo in
lineis arcuatis, propterea quod linea horum corporum autem in rectis
est, vel in arcuatis, dividitur ab hoc centro com-
muni in duas partes similes & committitur in lineis rectis, non di-
viditur in duas partes similes vel progredietur vel progredietur uniformiter in
lineis arcuatis, propterea quod ab eo dividitur distantia centri com-
muni in duas partes similes & centrum corporum in data ratione.
Eadem ratio in arcuatis, utrumque habent in se, & quod in lineis
vel quiescent vel progredietur uniformiter in lineis arcuatis, propterea
quod ab eo dividitur distantia inter centrum commune totum &
centrum quarti in data ratione, & sic in infinitum. Igitur in
sistendo corporum in quocumque loco, aut in motu, aliosq. omni-
bus in se extrinsecus in partem communem vacant, adeoque moventur
singula uniformiter in singulis, commune omnium centrum
gravitatis vel quiescent vel progredietur uniformiter in directum.

In omni corpore autem corporum in quocumque loco, aut in motu, aliosq. omni-
bus in se extrinsecus in partem communem vacant, adeoque moventur
singula uniformiter in singulis, commune omnium centrum
gravitatis vel quiescent vel progredietur uniformiter in directum.
Et si corpora quiescent, moventur vel committentur in lineis rectis, continetur etiam unum
gravitas in eis, vel quiescent, vel progredietur vel progredietur in eo in
lineis arcuatis, propterea quod linea horum corporum autem in rectis
est, vel in arcuatis, dividitur ab hoc centro communi in duas partes
similes & committitur in lineis rectis, non dividitur in duas partes
similes vel progredietur vel progredietur uniformiter in lineis arcuatis,
propterea quod ab eo dividitur distantia centri communi in data
ratione. Eadem ratio in arcuatis, utrumque habent in se, & quod in
lineis vel quiescent vel progredietur uniformiter in lineis arcuatis,
propterea quod ab eo dividitur distantia inter centrum commune totum &
centrum quarti in data ratione, & sic in infinitum. Igitur in
sistendo corporum in quocumque loco, aut in motu, aliosq. omni-
bus in se extrinsecus in partem communem vacant, adeoque moventur
singula uniformiter in singulis, commune omnium centrum
gravitatis vel quiescent vel progredietur uniformiter in directum.

Nam vires illæ æquales pro quantitatis movendorum corporum) & secundum eas parallelas agendo, corpora omnia æquiter accelerantur, movebantur per legem 2. ad æqualem in æquale tempus & motus eorum inter se.

Schlüsse

[illegible]

demum conferendi sunt motus inter se & colligendi effectus re-
sultantis. Hoc modo in Peridolis pedam decem rem tentando,
ad quod in corporibus tam inaequalibus quam aequalibus, & tactis duor-
um corpora de intervallis amplius, puta pedum octo, quod cum
velaxd cum conca receret, repertum tempus sine errore tamen di-
torum in aequalibus abaeorpora non mutuo directe occurrerant, quod
in partes contrarias in ratio motus erat corporum utriusque illarum, atque
adeo quod actio & reactio semper erant aequales. Ut si corpus A
indecim pedibus in corpus B cum novem partibus motus, & annis septem
partibus periret post reflexionem etiam duabus, corpus B rediret
cum partibus illis septem. Si corpora obviarent, A cum
duodum partibus & B cum sex & rediret A cum duabus, rediret
B cum octo, facta detractione partium quatuordecim cum utroque.
De motu corporis A subducatur partes duodecim & restabit novem;
subducatur aliter partes sex & fiet motus duarum partium in pla-
gam contrariam. & sic de motu corporis B partium sex subdu-
cendo partes quatuordecim restant partes octo in plagam contrariam.
Quod si corpora ibant ad ean-
dam plagam, A velocius cum
partibus quatuordecim & B
tardius cum partibus sex, &
post reflexionem pergebat A
cum quinque partibus, perge-
bat B cum quatuordecim, fac-
ta translatione partium no-
vem in A & sex in B. Et in rebus. A con-
fessione & collisione co-
porum nunquam mutabatur quantitas motus quae ex summa motu-
um consistit, nec & si altera eorum in se ulla habet. Nam ex
errorem directionis & alterius in mentis tabulam ducit, itaque
per se adhuc in laetitia accipit. Iste igitur erat tactus peridola se-
rant de motu corporum a se mutuo utrumque in loco in-
finito A & B, translocat, & notare ad quod corpora a se debant post
conferentiam. Sed & in partibus inaequalibus partium detentas, & tex-
tura alias de causis irregularibus, et oris irregularibus.

Porro nequis objiciat Regulam ad quam probandam inventum
est hoc experimentum præponere corpora vel absolute curra
entia vel saltem perfecte clauda, cuius non nullæ percipiuntur in
corporeis, ut res in ære, ad hoc qd experimento ad descrip-
ta succedat in corporibus inclatis a præcedentibus, nam cum a
concurrente deinceps nunquam patet. Nam si secundum illa
in corporibus non perfecte duntaxatanda est, debet solennimodo
reflexio in iunctis præposita, & præpositate vis Effluere.
In *Thet. 11. 11. 12. & 13.* quæ corpora a velare a redeunt ab
inveniente velate congruunt. Ceterum alibi dicitur de pe-
fecte clauda. In prædictis clauda velare redeunt inveniende
est inveniende velata, propterea quod velare, in reliquis
corporibus ex concurrente duntaxat, velate inveniende velata
si talia velantur, etia ad determinatam (quæ tunc tenio)
facitq; corpora clauda inveniende velate relativa qd ad
relativam velare inveniende in data ratione. Id in prædictis
arete velare inveniende inveniende inveniende. Prædicta deni-
tendo. Prædicta & inveniende reflexionem, inveniende inveniende
velare, & inveniende velare inveniende reflexionem, & alibi
inveniende inveniende & inveniende inveniende. Prædicta
semper prædicta inveniende velare, & inveniende, quæ esset ad veloci-
tatem relativam inveniende & inveniende. Prædicta inveniende
velocitate redibant prædicta ex clauda alibi ex inveniende inveniende
inveniende. Inveniende inveniende prædicta & inveniende. Atq;
hoc prædicto Lex tertia quæ clauda & reflexionem per Thet. 11. 11. 12. 13.
prædicta est, quæ cum experimento plane congruat.

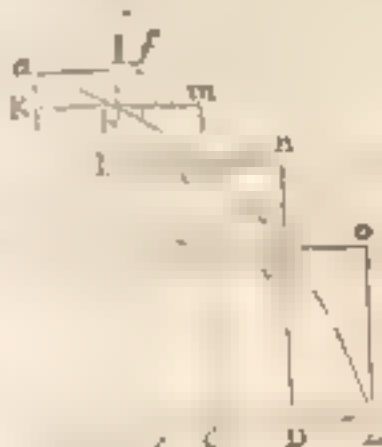
In attractionis rem se habet, et ostendit. Corpe clauda
inveniende inveniende inveniende inveniende, inveniende inveniende
quod inveniende inveniende inveniende inveniende. Si corpus
inveniende inveniende inveniende inveniende inveniende inveniende
teram inveniende inveniende inveniende inveniende inveniende inveniende
inveniende inveniende inveniende inveniende inveniende inveniende inveniende
libro. Prædicta inveniende inveniende inveniende inveniende inveniende inveniende
inveniende inveniende inveniende inveniende inveniende inveniende inveniende

neus urget partes diti. Itaque si non mollior cuneum, et
progressus cunei secundum directionem viæ a malleo in ipsum
impresit, ad velocitatem qua præcedunt cuneo, secundum
lineam facibus cunei perpendiculariter. Ex par est ratio Machu-
nationis omnium.

Harum efficacia & vires in eo se ostendunt ut diximus de ve-
locitate aspectus visus, & contr. Unde solvitur in omni ap-
paratu instrumentorum genere Problema; *Datum pondus data vi
movendi, ab invicem datam resistentiam vi data superandi.* Nam
si Machinae ita formantur ut velociter Agens & Resistens inter
reciprocet vires, Agens resistentiam sustinebit, & majori cum
velocitate partem eandem vincet. Certe si tanta sit velo-
citas duplicata ut vincatur etiam resistentia omnis, quae tam
ex contr. actum & inter se habeat ann. corporum attritione, quam
ex contr. actum & ab invicem i. partem in cohaesione & elevan-
dum pondus huiusmodi solet, superata omni ea resistentia, vi
redundans accelerationem motus sibi proportionalem partem in
partibus Machinae, partem in corpore resistente producet. Cu-
teram Mechanicam tractare non est huius instituti. Hinc vo-
let tantum ostendere quomodo late pateat, quomodo certa sit Lex
termini motus. Nam si in motu Agens actio ex cuius vi & velo-
citate connectitur, & Resistens reactio ex eius partium singula-
rum velocitatibus & vires resistendi ab earum attritione, co-
haesione, pondere & acceleratione oriatur, erant actio & re-
actio, in omni instrumentorum vi, sibi invicem semper aequales.
Et quia actio propagatur per instrumentum & ultimo im-
pugnatur in corpus omne resistens, eius ultima determinatio de-
terminandi reactioni semper erit contraria.

Lemma II.

Si in figura quavis $AacE$ rectis Aa , AE , & curva AcE comprehensa, inscribantur parallelogramma quocumque Ab , Bc , Cd &c. sub basibus AB , BC , CD , &c. & per latera Ac parallelis contentis, & compleantur parallelogramma ambobus Ab , Ac , Md &c. Nam horum parallelogrammorum altitudo minuitur, & numerus augetur in infinitum donec per ultimam rationem, quas habent ad se invicem figura inscripta Ab & Md , circumscripta $Aabm$ & AcE , & circumscripta $Aabedf$, sunt ratio et æqualitas.



Nam si recte inscriptæ & circumscriptæ differentia est summa parallelogrammorum $Al + La + Mn + Do$, hoc est (ob æquales ordinem bases, rectas, & unitatem basis Ab & altitudinis rationis Ac ad AE rectam) summa $ABLa$. Sed hoc rectangulum, eo quod latitudo eius AB in rationem minuitur, ac nam quovis dato. Ergo, per Lemma I, figura inscripta & circumscripta & multo minus curvilinea intermedia sunt ultimo æquales. Q. E. D.

Lemma III.

Si in figura quavis $AacE$ rectis Aa , AE , & curva AcE comprehensa, inscribantur parallelogramma quocumque Ab , Bc , Cd , &c. sub basibus AB , BC , CD , &c. & per latera Ac parallelis contentis, & compleantur parallelogramma ambobus Ab , Ac , Md &c. Nam horum parallelogrammorum altitudo minuitur, & numerus augetur in infinitum donec per ultimam rationem, quas habent ad se invicem figura inscripta Ab & Md , circumscripta $Aabm$ & AcE , & circumscripta $Aabedf$, sunt ratio et æqualitas.

in infinitum diminuta, minus fiet quam datum quodvis rectangulum.

Corol. 1. Hinc summa ultima parallelogrammorum evanescentium coincidit omni ex parte cum figura curvilinea.

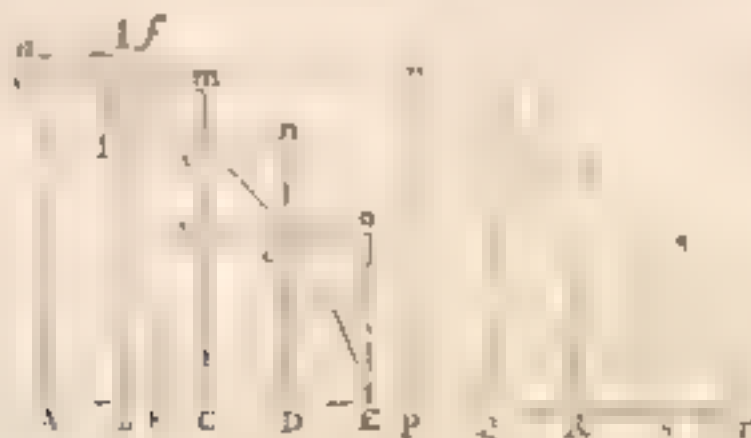
Corol. 2. Et multo magis figura rectilinea, quæ chordis evanescentium arcuum *ab, bc, cd, &c.* comprehenditur, coincidit ultimo cum figura curvilinea.

Corol. 3. Ut & figura rectilinea quæ tangentibus eorundem arcuum circumscribitur.

Corol. 4. Et propterea hæ figurae ultimæ (quoad perimetros *ac E,*) non sunt rectilineæ, sed rectilinearum limites curvilinei.

Lemma IV.

Si in duabus figuris AacF, PprT, inscribantur (ut supra)
duæ parallelogrammorum series, sit q. idem amborum numerus, &
ubi latitudines in infinitum diminuantur, rationes ultima paralle-
logrammorum in una figura ad parallelogramma in altera, singula-
rmm ad singula, sint eædem, dico quod figuree duæ AacF, PprT,
sunt ad invicem in eadem illa ratione.



Et non ut sunt parallelogramma singula ad singula, ita (com-
 ponendo) sit summa omnium ad summam omnium, & ita figura
 ad

ad figuram, existeret namque figura prior (per Lemma III.) ad summam priorum, & posteriore figura ad summam posteriorem in ratione æqualitatis.

Corol. Hinc si duæ curvæ, generis quantitates in eandem partium numerum æquæ, dividantur, & partes illæ, ubi numerus earum augeatur & magnitudo diminuitur in infinitum, datam obtineant rationem ad invicem, prima ad primam, secunda ad secundam ceteræ p. suo ordine ad ceteras, erunt tota ad invicem in eadem illa data ratione. Nam si in Lemmate huius figuræ sumantur parallelogramma inter se ut partes, summe partium semper erunt ætiam parallelogrammorum, atq. adeo, ubi partium & parallelogrammorum numerus augeatur & magnitudo diminuitur in infinitum, ut ultima ratione parallelogrammi ad parallelogrammum, id est (per hypothesein) in ultima ratione partis ad partem.

Lemma V.

Similium si in unam latus omnia, quæ sibi mutuo respondent, sunt proportionalia, tam curvilinea quam rectilinea, & area sunt in duplicata ratione laterum.

Lemma VI.

Si arcus quilibet positione datus AB subtendatur chorda AB, & in puncto aliquo A, in medio curvaturæ continue, trahatur recta utriusq. producta AD, dum puncta A, b ad invicem accedunt & coeant; dico quod angulus BAD sub chorda & tangente cœctentur in infinitum & ultimo evanescet.

Nam prædicatur AB ad b & AD ad d, & puncta A, b coeuntibus, nulla, adeo ipsius Ab parte AB recente amplius intra curvam, manifestum est quod hæc recta Ab

privata ratione laterum Ad, Ae . Sed his areis proportionales semper sunt arcus ABD, ACE , & his lateribus latera AD, AE . Ergo & arcus ABD, ACE sunt ultimo in duplicata ratione laterum AD, AE . *Q. E. D.*

Lemma X

Spacia, quae corpus argente quocumque regulari describit, sunt ipso motus initio in duplicata ratione temporum

Exponentur tempora per lineas AD, AE , & velocitates generata per ordinata DB, EC , & tria his velocitatibus descripta erunt ut arcus ABD, ACE his ordinatis descripta, hoc est ipso motus initio (per Lemma IX) in duplicata ratione temporum AD, AE . *Q. E. D.*

Corol. 1. Et hinc facile colligitur, quod corporum similes similibus figurarum partes temporibus proportionalibus describunt, nec errores, qui viribus aequalibus in partibus istis ad corpora similes applicatis generantur, & mutantur a locis figurarum, ad quae corpora temporibus istis proportionalibus ab aequalibus istis pervenirent, sunt ut quadrata temporum in quibus generantur quant proxime

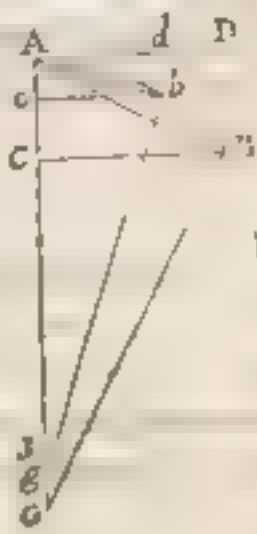
Corol. 2. Errores autem qui viribus proportionalibus similiter applicatis generantur, sunt ut vires & quadrata temporum conjunctim.

Lemma XI.

Subtensa ex angulo anguli contactus est ultimo in ratione duplicata subtensa arcus contermini.

Cas. 1. Sit arcus ille AB , tangens eius AD , subtensa anguli contactus ad tangentem perpendicularis BD , subtensa arcus AB . Hinc subtensa AB & tangenti AD perpendicularis erigantur AG, BC , concurrentes in G , dein accedant puncta D, B, C , ad puncta d, b, g , itaq; interfectio linearum BC, AG ultimo facta ubi puncta D, B accedunt usq; ad A . Manifestum est quod distan-

tia C γ minor esse potest quam assignata quavis. Est autem
 (ex natura circulo um per puncta ABG , Adg tractantium)
 AB quad. æquale $AG \times bD$ & Ab quad. æ-
 quale $Ag \times bd$, adeoq. ratio AB quad. ad
 Ab quad. componitur ex rationibus AG ad
 Ag & BD ad bd . Sed quoniam γC assu-
 mi potest minor longitudine quavis assigna-
 ta, fieri potest ut ratio AG ad Ag minus
 differat a ratione æqualitatis quam pro
 differentia quavis assignata, adeoq. ut ratio
 AB quad. ad Ab quad. minus differat a ra-
 tione BD ad bd quam pro differentia
 quavis assignata. Est ergo, per Lemma I,
 ratio ultima AB quad. ad Ab quad. æqualis
 rationi ultimæ BD ad bd . *Q. E. D.*



Cas. 2. Inclinetur jam BD ad AD in angulo quovis dato, &
 eadem semper erit ratio ultima BD ad bd quæ prius, adeoq. ea-
 dem ac AB quad. ad Ab quad. *Q. E. D.*

Cas. 3. Et quævis angulus D non detur, tamen anguli D, d
 ad æqualitatem semper vergunt & propius accedunt ad invicem
 quam pro differentia quavis assignata, adeoq. ultimo æquales e-
 runt, per Lem. I. & propterea lineæ BD , bd in eadem ratione
 ad invicem ac prius. *Q. E. D.*

Corol. 1. Unde cum tangentes AD , Ad , arcus AB , Ab & e-
 orum sinus BC , bc fiant ultimo chordis AB , Ab æquales, erunt
 etiam illorum quadrata ultimo ut subtentæ BD , bd .

Corol. 2. Triangula rectilinea ADB , Adb sunt ultimo in tri-
 plicata ratione laterum AD , Ad , inq. seiquiplicata laterum DB ,
 db Utpote in composita ratione laterum AD & DB . Ad & db
 existentia. Sic & triangula ABC , Abc sunt ultimo in tripli-
 cata ratione laterum BC , bc .

Corol. 3. Et quoniam DB , db sunt ultimo parallela & in du-
 plicata ratione ipsarum AD , Ad , erunt areae ultimæ curvilinearæ

ADB , Adb (ex natura Parabolæ) duæ tertiæ partes triangulorum rectilineorum ADB , Adb , & segmenta AB , Ab partes tertiæ eorundem triangulorum. Et inde hæc arcus & hæc segmenta erunt in triplicata ratione tum tangentium AD , Ad , tum chordarum & arcuum AB , Ab .

Scholium.

Ceterum in his omnibus supponimus angulum contactus nec infinite maiorem esse angulo contactuum, quos circuli continent eam tang. & tubus has, nec infinite minorem, hoc est curvaturam ad punctum A , nec infinite parvam esse nec infinite magnam, seu intervallum $A\gamma$ finitæ esse magnitudinis. Capi enim potest DB ut AD^3 quo in ead. circulus nullus per punctum A inter tangentem AD & curvam AB duci potest, proutq; angulus contactus erit infinite minor circularibus. Et simili argumento si fiat DB successive ut AD^4 , AD^5 , AD^6 , AD^7 , &c. habebitur series angulorum contactus pergens in infinitum, quorum quilibet posterior est infinite minor prior. Et si fiat DB successive ut AD^2 , AD^3 , AD^4 , AD^5 , AD^6 , &c. habebitur alia series angulorum contactus, quorum primus est eadem ratio cum circulari, secundus infinite major, & quilibet posterior infinite maior prior. Sed & inter duos quosvis ex his angulis posterior utraq; in infinitum pergens angulorum intermediorum inter, quo unum quilibet posterior erit infinite maior prior. Ut si inter terminos AD^2 & AD^3 iteratur series AD^3 , AD^4 , AD^5 , AD^6 , AD^7 , AD^8 , AD^9 , AD^{10} , &c. Et rursus inter binos quosvis angulos huius serie inferi potest series nova angulorum intermediorum ab invicem infinitis intervallis discreta. Neq; covit natura finitem.

Quæ de curvis lineis deq; superficiibus comprehensis demonstrata sunt, facile applicantur ad solidorum superficies curvas & con-

contenta. Præmissi vero hæc Lemmata ut effi-
cendi præplexas demonstrant omnes, non solum Geometrarum,
ad abstrahendum Contractiones etiam redduntur demonstrationes per
methodum indivisibilem. Sed quoniam dicitur, est indivisibilem
Hypothesis, & propterea Methodus illa vera Geometrica cen-
setur, nihil demonstrationes etiam æquationum ad ultimas quan-
titarum evanescens summa & rationes, primatq; nascentium,
id est, ad limites summam & rationem deducere, & propterea
limitum illorum demonstrationes qua potui brevitate præmittere.
His enim idem præstitit quod per methodum indivisibilem, &
principis demonstratis jam rutilius utemur. Proinde in sequenti-
bus, si quando quantitates tanquam ex particulis constantes consi-
deravero, vel si pro rectis usurpavero lineolas curvas, nolim in-
divisibilia sed evanescentia divisibilia, non summas & rationes
partium determinatarum, sed summam & rationum limites sem-
per intelligi, vimq; talium demonstrationum ad methodum præ-
cedentium Lemmatum semper revocari.

Obiectio est, quod quantitarum evanescentium nulla sit ultima
proportio, quippe quæ, antequam evanescunt non est ultima, ubi
evanuerint, nulla est. Sed & eodem argumentum, quæ contem-
di possit nullam esse corporis ad certum locum præteritæ veloci-
tatem ultimam. Hanc enim, antequam corpus attigerit locum, non
esse ultimam, ubi attingit, nullam esse. Et respondendum est. Per
velocitatem ultimam intelligeam, quæ corpus movetur neq; ante-
quam attingit locum ultimum & motus cessat, neq; postea, sed
tunc cum attingit, id est illam ipsam velocitatem in quo cum corpus
attingit locum ultimum & quacum motus cessat. Et transiit per
illam rationem quantitarum evanescentium intelligendam esse
rationem quantitarum non antequam evanescunt, sed postea,
sed quæcum evanescunt. Patet & ratio, quæ naturam est
esse quæcum nascuntur. Et nota, quæ naturam est
esse (vel augeri & minui) quæ naturam est
velocitas in fine motus attingere non esse naturam est reddi.

Hæc est velocitas ultima. Et par est ratio limitis quantitatum & proportionum omnium incipientium & cessantium. Quare, hic limitis sit certus & determinatus, Problema est vere Geometricum eundem determinare. Geometrica vero omnia in aliis Geometricis determinandis ac demonstrandis legitime usurpantur.

Contendi etiam potest, quod si dentur ultimæ quantitatum evanescentium rationes, dabuntur & ultimæ magnitudines, & sic quantitas omnis constabit ex indivisibilibus, contra quam *Euclides* de incommensurabilibus, in libro decimo Elementorum, demonstravit. Verum hæc *Oxychoni* falsæ innititur hypothæsi. Ultimæ rationes illæ quouscumque quantitates evanescent, revera non sunt rationes quantitatum ultimarum, sed limites ad quos quantitatum sine limite decreascentium rationes semper appropinquant, & quas propius assequi possunt quam pro data quavis differentia, nunquam vero transgredi, neque prius attingere quam quantitates diminuuntur in infinitum. Res clarius intelligetur in infante magis. Si quantitates duæ quarum data est differentia augeantur in infinitum, dabitur harum ultima ratio, tantum ratio æqualitatis, nec tamen alio dabitur quantitates ultimæ seu maximæ quarum ista est ratio. Hæc in sequentibus, si quando sacili rerum imaginationi complens, dixerò quantitates quam minimas, vel evanescentes vel ultimas, cave intelligas quantitates magnitudine determinatas, sed cogita semper diminuendas sine limite.

vis centripeta successive agat in C , D , E , &c. faciens ut corpus singulis temporis particulis singulas describat rectas CD , DE , EF , &c. jacebunt hæ in eodem plano, & triangulum SCD triangulo SBC & SDE ipsi SCD & SEF ipsi SDE æquale erit. Æqualibus igitur temporibus æquales areæ in plano immoto describuntur & componendo, sunt arearum latinx quavis $SADS$, $SAFS$ inter se, ut tant tempora descriptionum. Augatur jam numerus & minuatür latitudo triangulorum in infinitum, & eorum ultima perimeter ADF , (per Corollarium quartum Lemmatis tertii) erit linea curva, adeoq. vis centripeta qua corpus de tangente hujus curvæ perpetuo retrahitur, aget indefinenter; areæ vero quavis descriptæ $SADS$, $SAFS$ temporibus descriptionum semper proportionales, erunt eidem temporibus in hoc casu proportionales. *Q. E. D.*

Corol. 1. In mediis non resistentibus, si areæ non sunt temporibus proportionales, vires non tendunt ad concursum radiorum.

Corol. 2. In mediis omnibus, si arearum descriptio acceleratur, vires non tendunt ad concursum radiorum, sed inde declinant in consequentia.

Pro. II. Theor. II.

Corpus omne quod, cum movetur in linea aliqua curva, & radio ducto ad punctum vel immobile, vel motu rectilineo uniformiter procedens, describit areæ circa punctum illud temporibus proportionales, urgetur a vi centripeta tendente ad idem punctum.

Cas. 1. Nam corpus omne quod movetur in linea curva, detorquetur de cursu rectilineo per vim aliquam in ipsum agentem. (per Leg. 1.) Et vis illa quæ per curvæ rectilineo detorquetur & cogitur triangula quæ n. m. o. a. SAB , SBC , SCD &c. circa punctum immobile S , temporibus æqualibus æqualia describit, agiturque per motum lineam per C ipsi C per Prop. 4. Lib. I. Et per Lem. II. erit SA æqualis SE .

BS, & in loco *C* secundum lineam ipsi *dD* parallelam, hoc est secundum lineam *CS*, &c. Agit ergo semper secundum lineas tendentes ad punctum illud immobile *S. Q. E. D.*

Cas. 2. Et, per Legem Corollarium quintum, perinde est siue quietat superficies in qua corpus describit figuram curvilineam, siue moveatur eadem una cum corpore, figura descripta & puncto suo *S* uniformiter in directum.

Scholium.

Urgeri potest corpus a vi centripeta composita ex pluribus viribus In hoc casu lentes Propositionis est, quod vis illa quæ ex omnibus componitur, tendit ad punctum *S*. Porro si vis aliqua agat secundum lineam super eadem descriptæ perpendicularem, hæc faciet corpus deflectere a plano sui motus, sed quantitatem superficier descriptæ nec augebit nec minuet, & propterea in compositione virium negligenda est.

Prop. III. Theor. III.

Corpus omne quod, radio ad centrum corporis alterius utrinque, motu dicto, describit areas circa centrum illud temporibus proportionales, urgetur et composita ex vi centripeta tendente ad corpus alterum & ex vi omni acceleratrice, qua corpus alterum urgetur.

Nam (per Legem Corol. 6.) si vi nova, quæ æqualis & contraria sit illi qua corpus alterum urgetur, urgetur corpus utrumque, secundum lineas parallelas, perget corpus primum describere circa corpus alterum areas easdem ac prius: vis autem qua corpus alterum urgebatur, jam destruitur per vim sibi æqualem & contrariam, & propterea (per Leg. 1.) corpus illud alterum vel quietat vel movebitur uniformiter in directum, & corpus primum, urgente differentia virium, perget areas temporibus proportionales circa corpus alterum describere. Tendit igitur (per Theor. 1.) differentia virium ad corpus illud alterum ut centrum. *Q. E. D.*

Co-

Corol. 1. Hinc si corpus unum radio ad alterum ducto describit areas temporibus proportionales, atq; de vi tota (sive simplici, sive ex viribus pluribus, juxta Legum Corollarium secundum, composita,) qua corpus prius urgetur, subducatur (per idem Legum Corollarium) vis tota acceleratrix qua corpus alterum urgetur, vis omnis reliqua qua corpus prius urgetur tendet ad corpus alterum ut centrum.

Corol. 2. Et si areae illae sunt temporibus quamproxime proportionales, vis reliqua tendet ad corpus alterum quamproxime.

Corol. 3. Et vice versa, si vis reliqua tendit quamproxime ad corpus alterum, erunt areae illae temporibus quamproxime proportionales.

Corol. 4. Si corpus radio ad alterum corpus ducto describit areas quae, cum temporibus collatae, sunt valde inaequales, & corpus illud alterum vel quiescit vel movetur uniformiter in directum, actio vis centripetae ad corpus illud alterum tendentis, vel nulla est, vel miscetur & componitur cum actionibus admodum potentibus aliarum virium: Vtq; tota ex omnibus, si plures sunt vires, composita, ad aliud (sive immobile sive mobile) centrum dirigatur, circum quod aequabilis est arearum descriptio. Idem obtinet ubi corpus alterum motu quocumq; movetur, si modo vis centripeta sumatur, quae restat post subtractionem vis totius agentis in corpus illud alterum.

Scholium

Quoniam aequabilis arearum descriptio Index est centri quod vis illa respicit qua corpus maxime afficitur, corpus autem vi ad hoc centrum tendente retinetur in orbita sua, & motus omnis circularis recte dicitur circa centrum illud fieri, cujus vi corpus retrahatur de motu rectilineo & retinetur in Orbita: quodni usurpamus in sequentibus aequabilis arearum descriptionem ut Indicem centri circum quod motus omnis circularis in spatii libere peragitur?

Prop. IV. Theor. IV.

Corporum quæ diversos circulos æquali motu describunt, vires centripetas ad centra eorundem circulorum tendere, & esse inter se ut arcuum suorum descriptorum quadrata applicata ad circulorum radios.

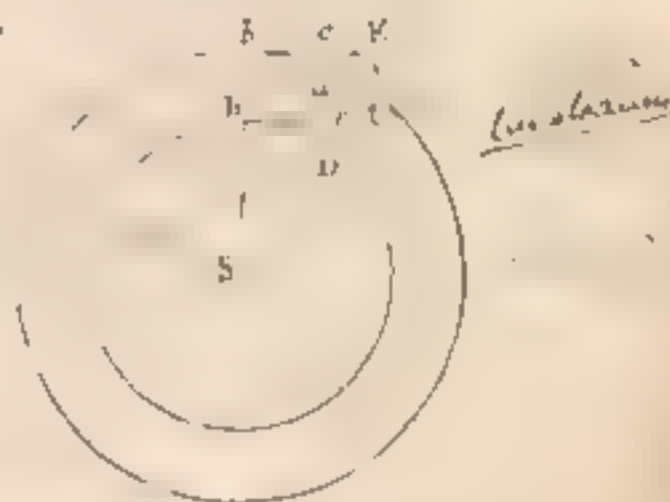
Corpora B, b in circumferentiis circulorum BD, bd gyrantia, simul describant arcus BD, bd. Quoniam tota vi infra describerent tangentes BC, bc his arcibus æquales, manifestum est quod vires centripetæ sunt quæ perpetuo retrahunt corpora de tangentibus ad circumferentias circulorum, atq; adeo hæ sunt ad invicem in ratione prima ipsarum nascentium CD, cd: tendunt vero ad centra circulorum per Theor. II, propterea quod arcæ radius descriptæ ponuntur temporibus proportionales. Fiat figura tkb figuræ DCB similis, & per Lemma V, lineola CD erit ad lineolam kt ut arcus BD ad arcum bt: nec non, per Lemma XI, lineola nascentis tk ad lineolam nascentem de ut bt quad. ad bd quad. & ex æquo lineola nascentis DC ad lineolam nascentem de ut BD x bt ad bd quad. seu quod perinde est, ut $\frac{BD \times bt}{Sb}$ ad $\frac{bd \text{ quad.}}{Sb}$, a-

deoq; (ob æquales rationes $\frac{bt}{Sb}$ & $\frac{BD}{Sb}$) ut $\frac{BD \text{ quad.}}{SB}$ ad $\frac{bd}{Sb}$ quad.

Q. E. D.

Corol. 1. Hinc vires centripetæ sunt ut velocitatum quadrata applicata ad radios circulorum.

Corol. 2. Et reciprocè ut quadrata temporum periodicorum applicata



plicata ad radios ita sunt hae vires inter se. Id est (ut cum Geometris loquar) hae vires sunt in ratione composita ex duplicata ratione velocitatum directe & ratione simplici radiorum inverse: necnon in ratione composita ex ratione simplici radiorum directe & ratione duplicata temporum periodicorum inverse.

Corol. 3. Unde si tempora periodica aequantur, erunt tum vires centripetae tum velocitates ut radii, & vice versa.

Corol. 4. Si quadrata temporum periodicorum sunt ut radii, vires centripetae sunt aequales, & velocitates in dimidiata ratione radiorum: Et vice versa.

finis

Corol. 5. Si quadrata temporum periodicorum sunt ut quadrata radiorum, vires centripetae sunt reciproce ut radii, & velocitates aequales. Et vice versa.

Corol. 6. Si quadrata temporum periodicorum sunt ut cubi radiorum, vires centripetae sunt reciproce ut quadrata radiorum, velocitates autem in radiorum dimidiata ratione: Et vice versa.

Corol. - Eadem omnia de temporibus, velocitatibus & viribus, quibus corpora similes figurarum quarumcunque similia, centraque similia possident, partes describunt, consequuntur ex Demonstratione precedentium ad hunc casus applicata.

Scholium

Cum Corollarium texti obtinet in corporibus celestibus (ut scilicet colligerunt etiam notante *Hrenius, Hoelms & Hollens*) & propter ea quae spectant ad vim centripetam decrecentem in duplicata ratione distantiarum a centro decrecentius insequentibus exponere.

Porro precedentis demonstrationis beneficio colligitur etiam proportio vi centripetae ad vim quamlibet notam, qualis est ea gravitatis. Nam cum vis illa quo tempore corpus percurrit a *C* ad *B* repellat ipsum per ipsum *C* *D*, quod ipso motu sit aequale est quadrato arcui *B* *D* ad circuli diametrum applicato, & corpus omne vi eadem in eandem semper plagam con-

continuata, describat spatia in duplicata ratione temporum. Vis illa, quo tempore corpus revolvens arcum quemvis datum describit, efficiet ut corpus aleni recta progrediens describat spatium quadrato arcus illius ad circuli diametrum applicato aequale, adeoque est ad vim gravitatis ut spatium illud ad spatium quod grave cadendo eodem tempore describit. Et huiusmodi Propositionibus *Hugenius*, in eximio suo Tractatu de Horologio oscillatorio, vim gravitatis cum revolventiam viribus centri fugis contulit.

Demonstrari etiam possunt precedentia in hunc modum. In circulo quovis describi intelligatur Polygonum laterum quorumcumque. Et si corpus in Polygoni lateribus data cum velocitate movendo, ad eius angulos singulos a circulo reflectatur, vis qua singulis reflexionibus impingit in circulum erit ut eius velocitas, adeoque summa virium in dato tempore erit ut velocitas illa & numerus reflexionum conjunctum, hoc est (si Polygonum detur specie) ut longitudo dato illo tempore descripta & longitudo eadem applicata ad Radium circuli, id est ut quadratum longitudinis illius applicatum ad Radium, adeoque si Polygonum lateribus infinite diminutis coincadat cum circulo, ut quadratum arcus dato tempore descripti applicatum ad radium. Hæc est vis qua corpus urget circulum, & huc æqualis est vis contraria qua circulus continuo repellit corpus centrum versus.

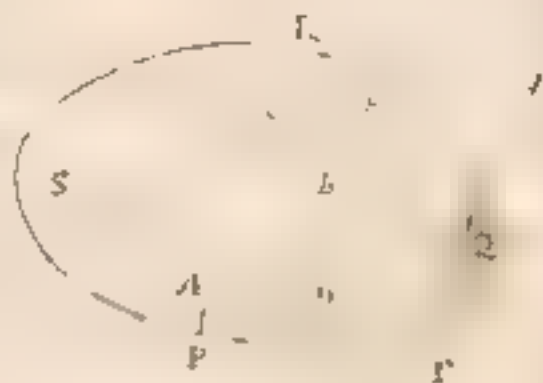
Prop. V. Prob. I.

Data quibuscumque in locis velocitate, qua corpus figuram datam circum illis id commune aliquod centrum tendentibus describit, centrum illud invenire.

Figuram descriptam tangant rectæ tres PT , TQV , VR in punctis totidem P , Q , R , concurrentes in T & V . Ad tangentes erigantur perpendiculara PA , QB , RC , velocitatibus corporis in punctis illis P , Q , R a quibus eriguntur reciproce proportionalia, id est ita ut sit PA ad QB ut velocitas in Q ad velocitatem in P , & QB ad RC ut velocitas in R ad velocitatem

in Q . Per perpendicularorum terminos A, B, C ad angulos rectos ducantur AD, DBE, EC concurrentia in $D \& E$: Et aëtz TD, VE concurrent in centro quæsito S .

Nam cum corpus in $P \& Q$ radius ad centrum ductis areas describat temporibus proportionales, sintq, areæ illæ simul descriptæ ut velocitates in $P \& Q$ ductæ respective in perpendiculara a centro in tangentes PI, QI demissa: Erunt perpendiculara illa ut velocitates reciproce, adeoq; ut perpendiculara AP, BQ directe, id est ut perpendiculara a puncto D in tangentes demissa. Unde facile colligitur quod puncta S, D, I sunt in una recta. Et simili argumento puncta S, E, I sunt etiam in una recta, & propterea centrum S in concursu rectarum ID, VE reperitur. $Q. E. D.$



Pro. VI. Theor. V.

Si corpus P revolvendo circa centrum S , describat lineam quavis curvam APQ , tangat vero recta ZP & curvam illam in puncto quocunque P , & ad tangentem ab alio quocunque puncto Q agatur QR distans a SP parallela, ac demittatur QI perpendiculararis ad distantiam SP . Fico quod sit centripeta sit reciproce ut solidum SP quadr. $\times QI$, vel $\frac{SP^2 \times QI}{QR}$, si modo solida illius ea semper sumatur quantitas que ultimo fit ubi coeunt puncta $P \& Q$.

Namq; in figura indefinire parva QRP lineola nascentis QR , dato tempore, est ut vis centripeta (per Leg. II.) &



data vi, ut quadratum temporis (per Lem. X.) atq, adeo, neutro dato, ut vis centripeta & quadratum temporis consunctum, adeoq, vis centripeta ut lineola QR directe & quadratum temporis inverse. Est autem tempus ut area SPQ , ejusve dupla $SP \times QT$, id est ut SP & QT conjunctum, adeoq, vis centripeta ut QR directe atq, SP quad in QT quad. inverse, id est ut $\frac{SP \text{ quad.} \times QT \text{ quad.}}{QR}$

inverse. *Q. E. D.*

Corol. Hinc si detur figura quævis, & in ea punctum ad quod vis centripeta dirigatur, inveniri potest lex vis centripetae quæ corpus in figuræ illius peruncto gyrari facit. Nimirum computandum est solidum $\frac{SP \text{ quad.} \times QT \text{ quad.}}{QR}$ huic vi reciproce proportionale. Ejus rei dabimus exempla in problematis sequentibus.

Prop. VII. Prob. II.

Cyretur corpus in circumferentia circuli, requiratur lex vis centripetae tendentis ad punctum aliquod in circumferentia datum

Est circuli circumferentia SQP , A , centrum vis centripetae S , corpus in circumferentia latum

P , locus proximus in quem movebitur Q . Ad diametrum SA & rectam SP demitte perpendiculara PK , QT , & per Q ipsi SP parallelam age LR occurrentem circulo in L & tangenti PR in R , & coeunt TQ , PR in Z .

Quia tria ad nem. triangulorum ZQR , ZTP , SPA erit RP quadr. Hoc est QRL , ad QT quad. ut SA quad. ad SP quad.

Ergo $\frac{QRL \times SP \text{ quad.}}{SA \text{ quad.}}$ aequatur QT quad. D. cantur hac aequa-



Scholium.

Et simili argumento corpus movebitur in Ellipsi vel etiam in Hyperbola vel Parabola, vi centripeta quæ sit reciproce ut cubus ordinatum applicatæ ad centrum virium maxime longinquum tendentis.

Prop. IX. Prob. IV.

Gyretur corpus in spirali PQS secante radios omnes SP, SQ , &c. in angulo dato: Requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum spiralis.

Detur angulus indefinite parvus PSQ , & ob datos omnes angulos dabitur specie figura $SPQRT$. Ergo datur ratio

$\frac{QT}{RQ}$, estq, $\frac{QT^2}{QR}$ quad. ut QT , hoc est ut SP . Mutetur jam ut-

cunq, angulus PSQ , & recta QR angulum contactus QPR subtendens mutabitur (per Lemma XI.) in duplicata ratione ipsius PR vel QT . Ergo manebit $\frac{QT^2}{QR}$ quad. eadem quæ prius,

hoc est ut SP . Quare $\frac{QT^2}{QR} \propto SP$ est ut SP^3 cub. id est (per Corol. Theor. V.) vis centripeta ut cubus distantie SP . Q. E. D.

Lemma XII.

Parallelogramma omnia circa datam Ellipsin descripta esse inter se equalia. Idem intellige de Parallelogrammis in Hyperbola circumæ diametros ejus descriptis.

Constat utrumq; ex Corol. 1.

Prop.

Prop. X. Prob. V.

Cyrcetur corpus in Ellipfi requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum Ellipseos.

Sunto CA, CB
 semiaxes Ellipseos;
 CP, DK diame-
 tri conjugatæ, $PF,$
 Qt perpendicularia
 ad diametros; Qv
 ordinatum applica-
 ta ad diametrum
 CP . & si complea-
 tur parallelogram-
 mum Qv & RP , erit
 (ex Conicis) Pv & G
 ad Qv quad. ut
 PC quad. ad CD
 quad. &c (ob simi-
 lia triangula Qvt, PCF) Qz quad. est ad Qt quad. ut PC quad.
 ad PF quad. & conjunctis rationibus, Pv & G ad Qt quad. ut PC quad.
 ad CD quad. & PC quad. ad PF quad. id est v & G ad $\frac{Qt \text{ quad.}}{Pv}$ ut PC
 quad. ad $\frac{CD q \times PF q}{PC q}$. Scribe QR pro Pv , & (per Lemma
 xii.) $BC \times CA$ pro $CD \times PF$, nec non (punctis P & Q cocun-
 ribus) $2PC$ pro v & G , & datis extremis & medijs in se
 mutuo, fiet $\frac{Qt q \times PC q}{QR}$ æquale $\frac{2BC q \times CA q}{PC}$ Est ergo (per
 Corol. Theor. V, vis centripeta reciprocè ut $\frac{2BC q \times CA q}{PC}$, id est

(ob

(ob datum $2 BCq \times CAq$) ut $\frac{1}{1C}$, hoc est, directe et distantia

PC. Q. E. I

Corol. 1. Unde vicissim si vis sit ut distantia, movebitur corpus in Ellip*si* centrum habente in eadem ovieria, aut tunc in celo, in qua Ellip*si* migrare potest.

Corol. 2. Et aequalia erunt revolutionum in Ellip*si* circa centri
circa centrum centri*um* periodica tempora. Nam tempora
haec in Ellip*si*bus similibus aequalia sunt per Corol. 2 & Prop.
IV: Et Ellip*si*bus eandem commutanti locum vis ad minimum tenet,
tunc ad maximum ut Ellip*si*con area tota directe & locum parti-
culari simul deterpre*re* inver*si*, id est ut axes minores directe &
corporum velocitates in verticibus principalibus inver*si*, hoc est
ut axes illi directe & ordinationem ap*pli*cate ad axes alteros inver*si*,
& propterea (ob equalitatem rationum directarum & inver*si*-
rum) in ratione equalitatis.

Scholium.

Si Ellip*si*s, centro in infinitum abeunte, vertatur in Parabola*m*, corpus movebitur in hac Parabola, & vis ad centrum centri-
te distans iam tendens, evadet equalis. Hoc est Theorema
Gilder. Et si Com*me*ntio Parabolica, inclinatione plani ad conum
sectum mutata, vertatur in Hyperbola*m*, movebitur corpus in
hanc par*te*netro, si centripeta in centr*u*g*u*gam versa.

& $G \times P$ ad $Q \times quad.$ ut CP quad. ad CD quad. & (per Lem. VIII)
 $Q \times quad.$ ad $Q \times quad.$ punct. $Q \times P$ conueniens, est ratio a qua-
 litatis, & $Q \times quad.$ ut $Q \times quad.$ est ad $Q \times quad.$ ut $E \times P$ quad.
 ad $P \times F$ quad., id est ut CA quad. ad PF quad. (per Lem. XII)
 ut CD quad. ad CB quad. Et conueniens huiusmodi ratio-
 bus, $L \times QR$ hic ad $Q \times quad.$ ut $Q \times quad.$ ad $PC \times G \times CB$ quad. (per
 ad CD quad. ad CB quad. id est ut $AC \times L$ (ut $2 \times CB$) $\times C$
 $P \times G$ ad $PC \times G \times CB$ quad. ut $2 \times PC$ ad $G \times CB$. Sed per Q
 & P conueniens, requantur $2 \times PC$ & $G \times CB$. Ergo & his proportio-
 nalia $L \times QR$ & $Q \times quad.$ x quantur. Dicantur hec aequalia in
 $SP \times Q$ & fiet $L \times SP \times Q$ aequale $SP \times Q \times Q \times quad.$ Ergo (per Corol.
 QR)

Theor. V.) vis centripeta reciproca est ut $L \times SP \times Q$ id est recipro-
 ce in ratione duplicata distantie SP . $Q \times L$.

Eadem breuitate qua traduximus Problema quoniam ad Parabola-
 lam, & Hyperbolam, haeret idem hic facere: verum ob dignita-
 tem Problematis & usum eius in sequentibus, non pigebit casus
 ceteros demonstratione confirmare.

Prop. XII. Prob. VII.

*Moueatur corpus in Hyperbolæ: requiratur lex vis centripetæ tenden-
 tis ad umbilicum figuræ*

Sunto CA, CB semi-axes Hyperbolæ; PG, KD diam. con-
 iugatae; PF, QZ perpendicularia ad diametros; & QZ ordina-
 tum applicata ad diametrum GP . Agitur SP secans in centro
 D in F , & ordinatum applicatum QZ in x , & comple-
 atur parallelogrammum $QKPx$. Patet IP aequali esse QZ , &
 angulo anverso AC , & QZ aequali esse QZ ab altero Hyperbolæ umbilico
 H linea HI ipsi LC parallela ob aequales CS, CH , aequales $IS,$
 EL id est ut EP (in EF) eadem sit ipsarum PS, PI , id est (ob
 parall. HI, PR & angulos aequales IPR, HPZ) ipsarum
 PI, PA quarum differentia axem totum $2 \times AC$ aequat. At SP

demittitur perpendicularis QY . Et Hyperbolæ latere recto
 principali (seu $\frac{2BCq}{AC}$) dictio L , erit $L \times QR$ ad $L \times P$ ut QR
 ad Pe , id est, ut PE (seu AC) ad PC , Et $L \times P$ ad GvP
 ut I ad Gv , & GvP ad Qvq ut CPq
 ad CDq , & (per Lem. VIII.) Qvq ad I
 $Q \times q$, punctis Q & P coeuntibus
 fit ratio aequalitatis, & $Q \times q$ seu
 Qq est ad QIq ut LPq ad PFq ,
 id est ut CAq ad PFq , sive (per
 Lem. XII.) ut CDq ad
 CBq , & conjunctis his con-
 iunctis rationibus $L \times QR$ fit
 ad QIq ut AC
 ad $PC + I$ ad
 $Gv + CPq$ ad
 $CDq + CDq$
 ad CBq id est
 ut $AC \times I$ seu
 $\frac{2BCq}{AC} \times P$
 q ad $PC \times$
 $Gv \times CB$ propterea
 hoc ut $2PC$
 ad Gv , sed
 punctis Q & P
 coeuntibus
 ratio $2PC$
 ad Gv fit & huius proportio alia $L \times QR$ & QIq ut
 Dico tunc hanc aequalem $\frac{SPq}{QR}$ & fiet $L \times SPq$ aequale $\frac{SPq \times QIq}{QR}$
 Item (per Corol. Theor. V.) ut constat ex rationibus
 $L \times SPq$ est in ratione duplicata distantia SP a QI L .

Eodem modo demonstratur quod corpus, hac vi centripeta in
centrigam vera, movetur in Hyperbola conjugata.

Lemma XIII.

Latitudo rectam Parabolæ ad eandem quæritas pertinet, est quadren-
plum distantie æque ut utitur id umbilico figuræ Patet & Coroll.

Lemma XIV.

Perpendiculum quod ab umbilico Parabolæ ad tangentem eius demit-
tatur, medium est proportionale inter distantias umbilici a puncto
contactus & a vertice principali figuræ.

Sit enim AP Parabola, S umbilicus ejus, A vertex princi-
palis, P puncti-
um contact-
us, PO ordi-
natim applica-
ta ad diame-
trum princi-
palem, PM
tangens dia-
metro princi-
pali occurr-



ens in M & SN linea perpendicularis ab umbilico in tangentem
juncta AN , & ob æquales MY & SP , MN & NP , MA &
 AO , parallela erit rectæ AN & OP , & inde trian-
gulum SAN rectangulum erit ad AS si inde trianguli SMN , SPN ,
1^o PS est ad SN ut SN ad SA . $Q.E.D.$

Coroll. 1. PS est ad SN ut P ad SA .

Coroll. 2. Et ob distan-
tiam SA , & SN , ut PS

Coroll. 3. Et concurrens tangentis PM cum recta SN
quæ ab umbilico in ipsam perpendicularis est, incidit in rectam
 AN , quæ Parabolam tangit in vertice principali. Prop

Prop. XIII. Prob. VIII

Movetur corpus in perimetro Parabole requiritur Lex vis centripete tendentis ad naut dictam hujus figure.

Maneat constructio Lemmatis, siq. P corpus in perimetro Parabolæ, & a loco Q in quem corpus proxime moveretur, age ipsi SP Parallelam QR & perpendicularem QI, necnon Qv tangenti parallelam & occurrentem cum diametro TPC in v, tunc distantie SP in x. Jam ob similitudinem trian. P x v, MSP & x p q hanc unius latera SM, SP, æqualia sunt alterius latera Px & u QR & P v. Sed, ex Conicis, quadratum ordinatæ Qv a quale est rectangulo sub latere recto & segmento abscissæ P v, id est (per Lem. XIII.) rectangulo 4 PS x P v seu 4 PS x QR, & punctis P & Q coeuntibus, ratio Qv ad Qx (per Lem. 8.) fit æqualitatis. Ergo Qx q. eo in

lato, e quale
che rett. angu-
lo $4 P S \times Q$
 R . Est au-
tem (ob 2-
quales angu-
los $Q \times T$, M
 $P S$, $P M O$)
 Q , ad $Q T$.

ut PS ad SN hoc est (per Corol I Lem. XIV) ut PS ad
 AS , id est ut $4PS \times QR$ ad $4AS \times QR$, & inde (per Prop.
 9 Lib. V Elem) QI & $4AS \times QR$ aquantur. Ducantur
 hae aequilia in SP , & fiat $SP \times QI$ aequali $SP \times 4AS$

& propterea (per Corol. Theor. V.) vs centripeta est recipro-
ca ut $SP^2 \times 4AS$, id est, ob datam $4AS$, recipit in dupli-
cata ratione distantie SP . Q. E. I

Corol.

Corol. I. Ex tribus novissimis Propositionibus consequens est, quod si corpus quodvis P , recta deinde rectam quovis rectam PR , quacunque, cum velocitate exeat de loco P , & vis centripeta que sit reciproce proportionalis quadrato distantie a centro, simul ac ita-
tus, movebitur hoc corpus in a qua rectam QR quam libi-
bet habente in centro virtutis, & contra.

Corol. II Et si velocitas, quacumque corpus exeat de loco suo P , ea sit qua lineola PR in mutua aliqua tenuis particula de loco possit, & vis centripeta possit in eodem tempore corpus idem movere per spatium QR : movebitur hoc corpus in QR aliqua et-
ione cuius latus rectum est quantitas illa $\frac{QT}{QR}$ que ultimo sit ubi
lineolæ PR , QR in infinitum dimittuntur. Circulum in his
Corollariis refero ad Ellipticam, & eadem excipio ubi corpus recta
descendit ad centrum.

Prop. XIV. Theor. VI.

*Si corpora plura revolvantur circa centrum commune, & vis centri-
peta decrescat in duplicata ratione distantiarum a centro, dico
quod Orbium Lata recta sunt in duplicata ratione arearum quas
corpora radius ad centrum ductis, eodem tempore describunt.*

Nam per Corol. II. Prob. VIII. Latus rectum L aequale est
quantitati $\frac{QT}{QR}$ qua ultimo sit ubi eorum per se P & Q sed
linea mutua QR , dato tempore, est ut vis centripeta generans,
hoc est (per H. hypoth.) rec. proce. ut SP . Ergo $\frac{QT}{QR}$ est
ut $QT \times SP$ hoc est, latus rectum L in duplicata ratione are-
æ $QI \times SP$. *Q. E. D.*

Corol. Hinc I. aptos area tota, cuj. proportionale rectangulu-
m h. v. v. s. si in ratione composita ex duplicata ratione late-
ris recti & negativa ratione temporis periodici.

Prop.

Prop. XV. Theor. VII.

Si eadem positis, dico quod tempora periodica in Ellipsis sunt in ratione duplicata transversorum axium.

Namq. ax. maior & minor est proportionalis inter axem majorem (quem transversum appello) & latus rectum, atq. adeo recta illam ab axide est in ratione composita ex dimidiata ratione lateris recti & triplicata ratione axis transversi. Sed hoc rectangulum, per Corollarium Theorematis Sexti, est in ratione composita ex dimidiata ratione lateris recti & integra ratione periodici temporis. Dematur utrobyq. dimidiata ratio lateris recti & manebit triplicata ratio axis transversi æqualis rationi periodici temporis. *Q. E. D.*

** patet ex Corol.
6 Prop. 4*

Corol.* Sunt igitur tempora periodica in Ellipsis eadem ac in circulis, quorum diametri æquantur maioribus axibus Ellipticon.

Prop. XVI. Theor. VIII.

Si eadem positis, & actis ad corpora lineis rectis, quæ ibidem tangant orbitas, demissisq. ab umbilico communi ad eas tangentes perpendicularibus dico quod velocitates corporum sunt in ratione composita ex ratione perpendicularium inverse & dimidiata ratione laterum rectorum directe. Vide Fig. Prop. X. & XI.

Ab umbilico S ad tangentem PR demitte perpendiculari ST & velocitatem corporis Per t reciprocè in dimidiata ratione quantitat. $\frac{ST^2}{L}$. Nam velocitas illa est ut arcus quam minimus PQ

in data temporis particula descriptus, hoc est (per Lem. VII.) ut tangens PR, id est (ob proportionales PR ad QT & SP ad ST) ut $\frac{SP \times QT}{ST}$ sive ut ST reciprocè & SP & QT directe, estq.

SP x

$SP \times QT$ ut area dato tempore descripta, id est, per Theor. VI. in dimidiata ratione laterum recti $QE \cdot D$

Corol. 1. Latera recta sunt in ratione composita ex duplicata ratione perpendicularorum & duplicata ratione velocitatum.

Corol. 2. Velocitates corporum in maximis & minimis ab umbilico communis distantiae, sunt in ratione composita ex ratione dissimilataum recte & dimidiata ratione laterum recti cum directe. Nam perpendiculara sunt sunt ipse distantia.

Corol. 3. Ideoque, velocitas in Conica sectione, in minima ab umbilico distantia, est ad velocitatem in circulo in eadem a centro distantia, in dimidiata ratione laterum recti ad distantiam illam duplicatam.

Corol. 4. Corporum in Ellipticis gyrantium velocitates in mediocribus distantis ab umbilico communis sunt eadem quae corporum gyrantium in circulo ad eandem distantias, hoc est (per Corol. VI. Theor. IV.) recipiunt in dimidiata ratione distantiarum. Nam perpendiculara sunt sunt semper axes minore, & licet ut ut medix proportionales uter distantias & latera recta. Composita hae ratio inverte cum dimidiata ratione laterum rectorum directe, & haec ratio dimidiata distantiarum inverte.

Corol. 5. In eadem vel aequalibus figuris, vel etiam in similibus inaequalibus, quantum latera recta sunt aequalia, velocitas corporum est recipiunt in perpendicularum demum ab umbilico ad tangentem.

Corol. 6. In Parabola, velocitas est recipiunt in dimidiata ratione a centro corporis ad umbilico distantiae, in Elliptica minor est, in Hyperbolica major quam in hoc ratione. Nam per Corol. 2. Theor. XIV. perpendicularum demum ab umbilico ad tangentem in Parabola est in dimidiata ratione distantiae.

Corol. 7. In Parabola velocitas ubique est ad velocitatem corporis in circulo ad eandem distantiam in dimidiata ratione eadem ut in Elliptica minor est, in Hyperbola major.

tus rectum & $4DS$. Nam proportio $SP + PH$ ad PH ut $2SP$ ad L , in casu hujus Corollarii, fit $DS + DH$ ad DH ut $4DS$ ad L , & ideo in DS ad DH ut $4DS - L$ ad L .

Corol. 2. Unde si datur corporis velocitas in vertice principali D , invenietur Orbita expedire, capiendos scilicet latus rectum ejus, ad deplam distantiam DS , in duplicata ratione velocitatis hujus dati ad velocitatem corporis in circulo ad distantiam DS gyrantis. (Per Corol. 3 Theor. VIII) deinde DH ad DS ut latus rectum ad differentiam inter latus rectum & $4DS$.

Corol. 3. Hinc etiam si corpus moveatur in Sectione quacunque, Conica, & ex orbe suo impulsu quocunque exturbetur, cognosci potest orbis in quo posita cursum suum peragat. Nam componendo proprium corporis motum cum motu illi qui non impulsus solus generaret, habebitur motus quocumque corpus de dato impulsus loco, secundum rectam positionem datam, exhibet.

Corol. 4. Et si corpus illud vi aliqua extrinseca impressa contumpe perturbetur, innotescet cursus quam proxime, colligendo mutationes quas vis illa in punctis quibusvis in valet, & ex selecta analogia, mutationes continuas in locis intermedii assequendo.

S E C T. IV.

De Inventione Orbium Ellipticorum, Parabolicorum & Hyperbolicorum ex umbilico dato.

²²
Lemma XV.

Si ab Elliptico vel H parabolico, vel Hyperbolico umbilicus datus S H, ad punctum quodvis tertium V inflectantur rectæ duæ SV, HV, quarum una HV æqualis sit axi transverso seu rectæ alteræ SV a perpendiculari I R in Q d. recta erit in I, perpendicularum illud I R sectionem Conicam alicubi tangit: & contra, si I a puncto V H æqualis axi figura

Secet enim VH sectionem conicam in R, & jungatur S R. Ob æquales rectas I S, I H, æquales erunt anguli T R S, T R V. Binecat ergo R I angulum V R S & propterea figuram tangit & contra Q E D.

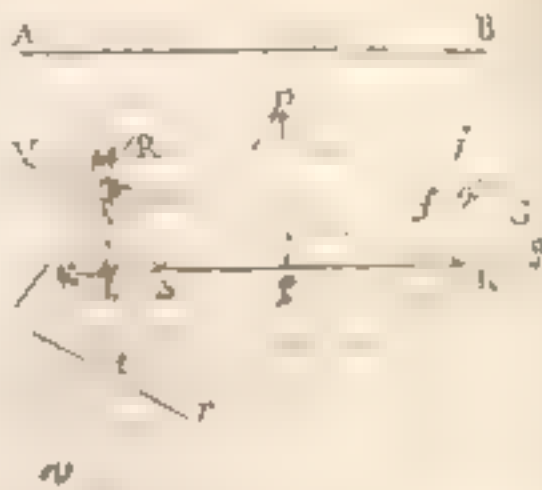


Prop. XVIII. Prob. X.

Datis umbilico & axibus transversis describere Transversas Ellipticas & Hyperbolicas, quæ transeunt per puncta data, & rectis positione datas contingunt.

Sit Sec. umbilicus & figuratum AC loci datus axis transversus Traiectio recta data P punctum per quod Traiectio debet transire & I R recta quam debet tangere. Centro P intervallo AB = SP, si obliqua sit Ellipsis, vel AB = SP, si ea sit Hyperbola, describatur circulus HG. Ad tangentem I R demittatur perpendicularis

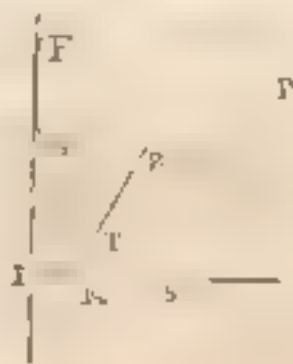
pendiculum ST , & producatue ea ad V , ut sit TV equalis ST , centroq; V & intervallo AC describatur circulus FH . Hac methodo siue dantur duo puncta P, p , siue duæ tangentes IR, ir , siue punctum P & tangens TR , describendi sunt circuli duo. Sit H eorum intersectio communis, & umbilicus S, H , axe illo dato describatur Trajectoria. Dico factum. Nam Trajectoria descripta (eo quod $PH \pm SP$ in Ellipsi, & $PH - SP$ in Hyperbola æquatur axi) transibit per punctum P , & (per Lemma superius) tanget rectam TR . Et eodem argumento vel transibit eadem per puncta duo P, p , vel tanget rectas duas TR, ir . Q. E. F.



Prop. XIX. Prob. XI.

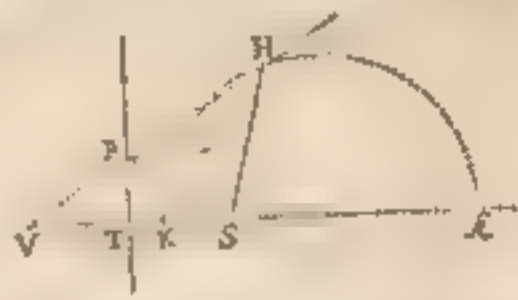
Circa datum umbilicum Trajectoriam Parabolicam describere, qua transibit per puncta data, & rectis positione datas contingat.

Sit S umbilicus, P punctum & IR tangens trajectoria descripta. Centro P , intervallo PS describe circulum FG . Ab umbilico ad tangentem ducite perpendicularem SI , & producam ad I , ut sit IV æqualis SI . Eodem modo describendus est alter circulus fg , si datur alterum punctum p ; vel invenendum alterum punctum z , si datur altera tangens ir , deinde ducenda recta IF quæ tangat duos circulos IG, fg dantur duo puncta P ,

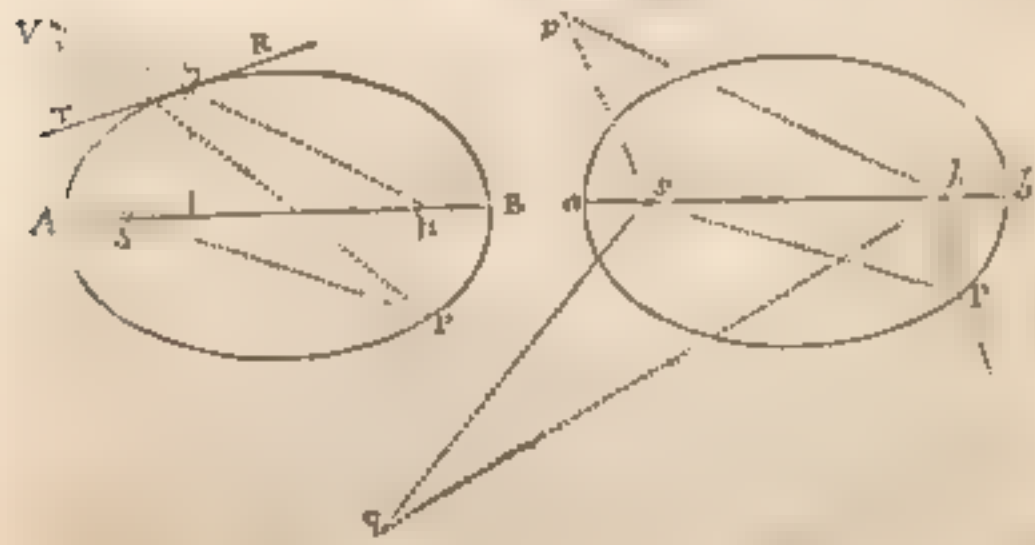


p , vel

descripto, secetur producta recta $T'R$ in H & umbilicis S, H ,
axe transverso rectam HV & ante describatur Trajectoria VD ,
eo factum. Namq; VH esse
ad SH ut VK ad SK , atq; a-
deo ut axis transversus Tra-
jectoriae describendae ad dist-
antiam umbilicorum ejus, pa-
tet ex demonstratis in Capite
secundo, & propterea Trajec-
toriam descriptam ejusdem
esse speciei cum describenda rectam vero TR quia angulus TR S
habetur, tangere Trajectoriam in puncto R , patet ex Corol-
Q. E. F.

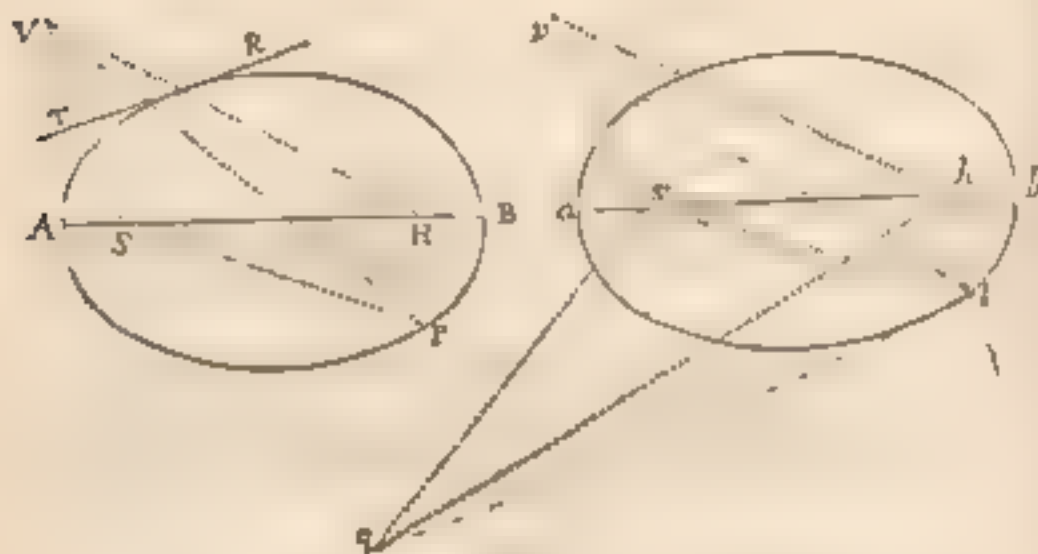


Cor. 4. Circa umbilicum S describenda jam sit Trajectoria
 APB , quae tangat rectam TR , transeatq; per punctum quod-
 P extra tangentem datum, quaeq; huius sit figurae $a p b$, axi



transverso ab & umbilicis a, b descripta. In qua etiam TR co-
mittit perpendicularum ST , & producendum ad I , ut sit II aequali
 ST . Angulus autem ISP , $SI P$ itaq; angulus ISP , $SI P$ & q equa-
li centroq; q & intervallo quod sit ad ab ut SP ad VS describe-
re

circulum secantem figuram xpb in p . Junge sp & age SH qua
sit ad sb ut est SP ad sp , quæq; angulum PSH angulo psb &
angulum VSH angulo psq æquales constituat. Deniq; umbi-
licis S, H , axe distantiam VH æquante, describatur lectio conica.



Dico factum. Nunc autem sq quæ sit ad sp ut est cl ad sp ,
quæq; constituat angulum esp angulo bsq & angulum esp angulo
 psq æquales, trianguli scs, spq erunt similes & propter
rer sb erit ad p ut est sb ad sp , id est cl ob similitudinem
 VSP, spq ut est VS ad SP seu sb ad pq . Æquantur ergo
 cl & sb . Porro ob similitudinem PSH, psb , est PH ad
 SH ut sb ad sl , id est, axi Conicæ CD ordinis sc per umbi-
licum umbilicorum intervallum, ut axi ab d umbilicorum inter-
vallum sb , & propter similitudinem, ista similis est figuræ
 xpb . Transit autem hæc figura per q & P , eo quod tri-
angulum PSH simile est triangulo psb , & quia VH æquatur ip-
sius axi & VS hincatur perpendiculariter a recta TR , tangit e-
dem rectam TR . $Q. E. F.$

Lemma XVI.

*A datis tribus punctis ad quartum non datum: flectere tres rectas
que eorum differentias vel dantur vel nullæ sunt.*

Cas. 1. Sinto puncta illa data A, B, C & punctum quartum Z , quod invenire oportet. Ob datam differentiam linearem AZ, BZ , locabitur punctum Z in Hyperbola cujus umbilici sunt A & B , & axis transversus differentia illa data. Sit axis ille MN . Cappe PM ad MA ut est MN ad AB , & erectio PR perpendiculari ad AB , deinde ZR perpendiculari ad PR , erit ex natura hujus Hyperbolæ ZR ad AZ ut est MN ad AB . Simili ductu su punctum Z locabitur in alia Hyperbola, cujus umbilici sunt A, C & axis transversus differentia inter AZ & CZ , d. i. q. potest QS ipsi AC perpendiculari, ad quam si ab Hyperbola hujus puncto quovis Z demittitur normali ZS , hæc taceat ad AZ ut est differentia inter AZ & CZ ad AC . Dantur ergo rationes ipsarum ZR & ZS ad AZ , & idcirco dantur eandem ZR & ZS ratio ad invicem; adeoque rectis RP, SQ concurrentibus in T , locabitur punctum Z in recta TZ positione data. Eadem Methodo per Hyperbolam tertiam, cujus umbilici sunt B & C & axis transversus differentia rectarum BZ, CZ , invenire potest alia recta in qua punctum Z locatur. Habitis autem duobus locis rectilineis, habebis punctum quæsitum Z in eorum intersectione $Q. E. I.$

Cas. 2. Si duæ ex tribus differentiis, puta AZ & BZ dantur, punctum Z locabitur in perpendiculari erecta ad AB . Si unus locus alius rectilineus in intersectione $Q. E. I.$

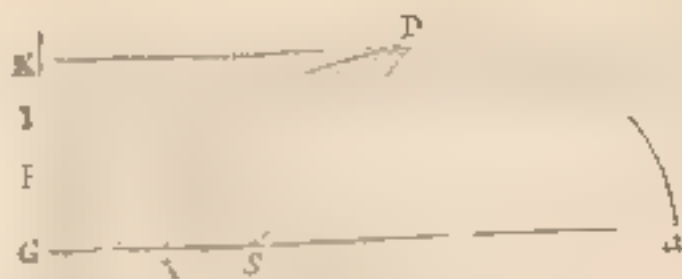
vertex, & Aa axis transversus Trajectoriae: quae, perinde ut GA minor, equalis vel maior fuerit quam AS , erit Ellipsis, Parabola vel Hyperbola; puncto

a in primo casu cadente ad eandem partem lineae GK cum puncto A ; in secundo casu abeun- in infinitum; in tertio cadente ad contrariam partem lineae GK .

Nam si demittantur

ad GI perpendiculara CI , DK , erit IC ad HB ut EC ad EB , hoc est ut SC ad SB . & vicissim IC ad SC ut HB ad SB , & a GA ad SA . Et simili argumento probabitur esse HD ad SD in eadem ratione. Jacent ergo puncta B , C , D in Confectione circa umbilicum S ita descripta, ut rectae omnes ab umbilico S ad Equila Sectionis puncta ductae, sint ad perpendiculara a puncto eodem ad rectam GK demissa in data illa ratione.

Methodo haud multum diversa huius problematis solutio tradit Clavius in Geometria Delii Hic. Concoram Theorem I. VIII. Prop XXV

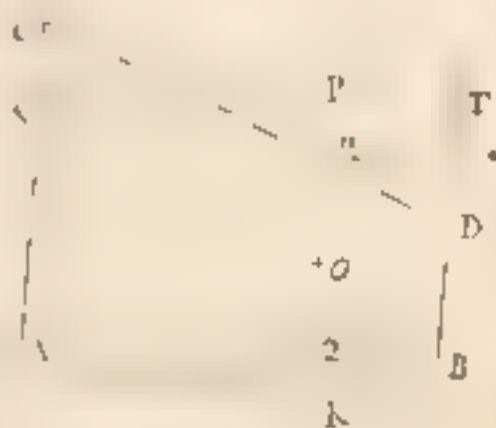


S E C T. V.

Inventio Orbium ubi umbilicus recte datur

Lemma XVII.

Si γ datae conice sectionis puncto quocunque P , ad Trapezium aliquod $ABCD$, in Conica illa sectione inscriptum, latera quatuor infinite producta AB , CD , AC , DB , totidem recte PQ , PR , PS , PT in datis angulis ducantur, singulae ad singula: rectangulum ductarum ad opposita duo latera $PQ \times PR$, erit ad rectangulum ductarum ad alia duo latera opposita $PS \times PT$ in data ratione



Cas. 1. Ponamus inprimis lineas ad opposita latera dictas parallelas esse alterutrum reliquorum laterum, puta PQ & PR lateri AC , & PS & PT lateri AB . Sintque utique PR & PS duo ex oppositis, puta AC & BD , parallelas. Et recta quæbitur parallelas illas latera AB & CD , ex diametro Conicæ sectionis, & bissecabit etiam RQ . Sit O punctum in quo RQ bissecatur, & erit PO ordinatum applicata ad diametrum illam. Producta PO ad h ut sit OK æqualis PO , & erit OK ordinatum applicata ad contrarias partes diametri. Cum igitur puncta A , B , P & K sint ad Conicam sectionem, & PK secet AB in dato angulo, erit (per Prop. 17 & 18 lib. III. Apollonii) rectangulum PQK ad rectangulum PSO in data ratione. Sed QK & TR æquales sunt, ut patet & quidem OK , OP , & OQ , OR differentie, & ideo etiam rect-

Lemma XVIII

Si a puncto si rectangulum ducatur ad opposita duo latera Trapezii PQ & PR in et rectangulum ducatur ad reliqua duo latera PS & PT in datis tunc, punctum P, a quo linee ducuntur, tangit eam in sectionem circa Trapezium descriptam.

Per puncta A, B, C, D & aliquod interiorum punctorum P, puta p, concipere Conicam sectionem describit: dico punctum P hanc semper tangere. Si negas, iunge AP secantem hanc Conicam sectionem alibi quam in P si fieri potest, puta in b. Ergo si ab his punctis p & b ducantur in dati angulis ad latera Trapezii rectae pq, pr, ps, pt & bk, br, bs, bd, erit ut bk x br ad bd x bs ita (per Lemma XVII) pq x pr ad ps x pt & ita (per Lemma I) PQ x PR ad PS x PT. Tunc & propter similitudinem triangulorum bk bt, PQ ps, ut bk ad bt ita PQ ad ps. Quare applicando punctum p ad propositam ad terminos correspondentes triangulorum bk bt & PQ ps, erit PR ad PT. Ergo Trapezia æquivalentia Ddlt & Ppqr, & conica conale Dd, DP propter rationem. Sed et itaq; dante sectionem recta a puncto P DP itaq; conale dante con puncto P. Quare punctum P tangit Conicam, unde ut a puncto in Conicam sectionem. Q. E. D.



Quod si hanc sectionem PQ, PR, PS a puncto exteriori P conicam sectionem proinde data recta AB, CD, AC, in punctis ad finem. Itaque dante conicam sectionem recta a puncto P PQ & PR ad q adiacentem ps quod in demonstratione punctum

Scho-

P, a quibus rectæ ducuntur, locabitur in sectione Conica quæ tangit lineas AB , CD in A & C & contra. Nam coeat linea BD cum linea AC manente positione trium AB , CD , AC , deinde coeat etiam linea PI cum linea PS : & rectangulum $PS \times PI$ evadet PS quad rectæq. AB , CD quæ curvam in punctis A & B , C & D secabant, jam Curvam in punctis illis coeuntibus non amplius secare possunt sed tantum tangunt.

Scholium.

Nomen Comæ sectionis in hoc Lemmate late sumitur, ita ut ætiam tam rectilinea per verticem Coni transiens, quam circularis basi parallela includatur. Nam si punctum p incidit in rectam, qua quævis ex punctis quatuor A , B , C , D junguntur, Conica sectio vertetur in geminas rectas, quarum una est recta illa in quam punctum p incidit, & altera recta qua alia duo ex punctis quatuor junguntur. Si trapezii anguli duo oppositi simul sumpti æquantur duobus rectis, & linea quatuor PQ , PR , PS , PI ducantur ad latera eius vel perpendiculariter vel in angulis quibuscvis æqualibus, sitq. rectangulum sub duobus ductis $PS \times PI$ æquale rectangulo sub duobus aliis $PS \times PI$, Sectio conica evadet Circulus. Idem fiet si lineæ quatuor ducantur in angulis quibuscvis & rectangulum sub duobus ductis $PQ \times PR$ sit æquale rectangulo sub aliis duobus $PS \times PI$ ut rectangulum sub finalibus angulorum S , I , in quibus duæ ultimæ PS , PI ducuntur, ad rectangulum sub finalibus angulorum in Q , R , in quibus duæ primæ PQ , PR ducantur. Extremi in casibus Locos puncti P est aliqua trilinea seu cum quæ vel eo respondentur sectiones Conicæ. Vnde autem Trapezium $ABCD$ sub quo potest quadrilaterum cuius latera duo opposita se mutuo intersectant diagonalem decurrant. Sed & e punctis quatuor A , B , C , D possunt trahi vel duo abire in infinitum, eoque patet latera illa quæ ad puncta illa convergunt,

x Opuscula ut
coram quæ huius dictionis
hæc demonstratio

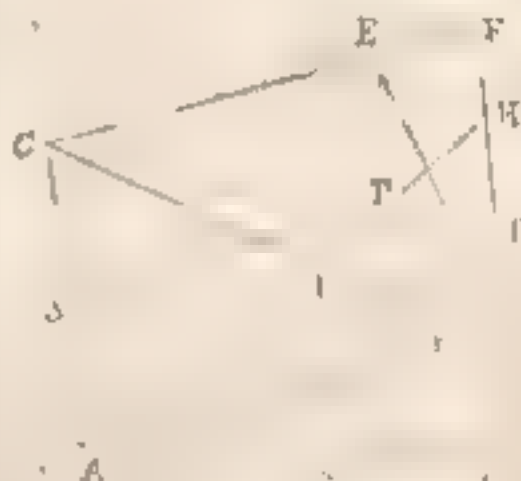
evadere parallela quo in casu sectio conica transibit per cetera puncta, & in plagas parallelarum abibit in infinitum.

Lemma XIX.

Invenire punctum P , a quo si rectae quatuor PQ , PR , PS , PT ad alias totidem positione datas rectas AB , CD , AC , BD singulae ad singulas in datis angulis ducantur, rectangulum sive duabus ductis $PQ \times PR$, sit ad rectangulum sub aliis duabus, $PS \times PT$, in data ratione.

Lineae AB , CD , ad quas rectae duae PQ , PR , unum rectangulum continentur ducuntur, conveniant cum aliis duabus positione datis lineis in punctis A , B , C , D . Ab eorum aliquo A age rectam quantilibet AH in qua velis punctum P reperiri. Secet ea lineas oppositas BD , CD , nimirum BD in H & CD in I , & ob datos omnes angulos figurae, dabuntur rationes PQ ad PA & PA ad PS , adeoque ratio PQ ad PS . Auferendo hanc a data ratione $PQ \times PR$ ad $PS \times PT$, dabitur ratio PR ad PT , & addendo datas rationes PI ad PR , & PI ad PH , dabitur ratio PI ad PH atque adeo punctum P . Q E I .

Coroll. 1. Hinc etiam ad Loci puncto uni infinitorum P punctum adducere D tangens duo poterit. Nam chorda PD ubi punctum P ad D conveniant, hoc est, ubi AH ducitur per punctum D , evanescit. Quo in casu utrumque ratio evanescentium IP & PH ascendet ut supra. Ipse itaque AD duc parallelam CF occurrentem BD in F , & in ea ultima ratione rectam in I , &



+ in solo ang
um $(A \text{ et } AB)$

+ Subducit ang
um $\frac{PI}{PH}$

& DE tangens erit, propterea quod CH & evanescens IH parallelæ sunt, & in E & P similiter uide.

Corol. 2. Hinc etiam Locus punctorum omnium P determinari potest. Per quodvis punctum A, B, C, D , puta A , duc Loxi tangentem AE , & per aliud quodvis punctum B duc tangenti parallelam BF occurrentem Loco in F . Invenietur autem punctum F per Lemma superius. Bifeca BF in G , & acta AG diameter erit ad quam BG & FG ordinatum applicantur. Hæc AG occurrat Loco in H , & erit AH latus transversum, ad quod latus rectum est ut BG q. ad AG . Si AG nullibi occurrat Loco, linea AH existente infinita, Locus erit Parabola & latus rectum

erit BG q. Sin ea alicubi occurrat, AG

Locus Hyperbola erit ubi puncta A & H sita sunt ad eandem partes ipsius G & Ellipsis, ubi G intermedium est, nisi forte angulus AGB rectus sit & intuper BG quad. æquale rectangulo AGH , quo in casu circulus habebitur.

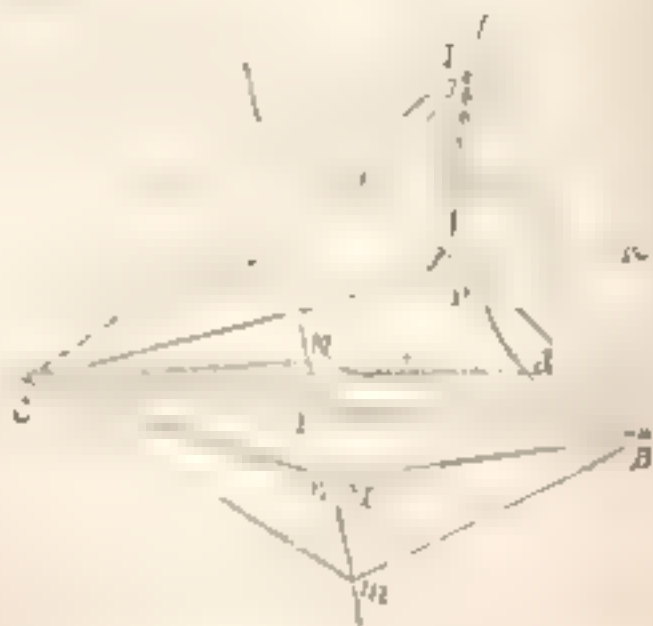
Atq; ita Problematis veterum de quatuor lineis ab E & P intercepti & ab Apollonio continuati non calculis, sed compoſito Geometria, qualem Veteres querebant, in hoc Corollario exhibetur.

Lemma XX.

Si per punctum quodvis $ASPQ$ angulus duobus oppositis A & P sit non quadratus. Coniungant in punctis A & P , & H & Q angulum illi tum infra punctis AO , AS occurrat vel non possint conungi in B & C , a punctis autem occurrant

tionem Conicam. Si tunc etiam, si rectæ BD , CD concursu suo D de ceciderint Sectionem Conicam per puncta B , C , A transeuntem & I tunc concursus tunc incidit in eius portionem aliquod A , cum aliter e due BM , CM coincidunt cum linea BC , punctum M continget rectam positione datam.

Nam in recta MN detur punctum N , & ubi punctum mobile M incidit in immotam N , incidat punctum mobile D in immotum P . Junge CN , BN , CP , BP , & a puncto P age rectas PT , PR occurrentes ipsis BD , CD in T & R , & facientes angulum BPT æqualem angulo BNM & angulum CPR æqualem angulo CNM . Cum ergo (ex Hypoth. si) æquales sint anguli MBD , NBP , ut & anguli MCD , NCP & aliter com-



NCD

monent NBD & NCP & restabunt æquales NBM & PBT , NCM & PCR : adeoque triangula NBM , PBT similia sunt, ut & triangula NCM , PCR . Quare PT est ad NM ut PB ad NB , & PR ad NM ut PC ad NC . Ergo PT & PR datam habent rationem ad NM , proindeque datam rationem inter se, atque adeoque per Lemma XX, punctum P (propter rectam in mobile & BT & CR continuam) continet sectionem Conicam $QLE D$.

Et contra, si rectam D contingat & eam in Conicam transeuntem per puncta B , C , A & ubi rectæ BM , CM coincidunt cum linea BC , punctum M ad D incidit in quod sectionis punctum

A

A; ubi vero punctum *D* incidit successive in alia duae quavis sectionis parabolae *p, P*, punctum mobile *M* incidit successively in parabolam immobilis *n, N*; per eandem *n*, agatur recta *nN*, & locetur Locas perpetuus puncti illius mobilis *M*. Nam, si fieri potest, versetur punctum *M* in linea aliqua curva. Tangit ergo punctum *D* sectionem Conicam per puncta quinq; *C, p, P, B, A* transcurrentem, ubi punctum *M* perpetuo tangit lineam curvam. Sed & ex iam demonstratis tangit etiam punctum *D* sectionem Conicam per eandem quinq; puncta *C, p, P, B, A* transcurrentem punctum *M* perpetuo tangit lineam rectam. Ergo transcurrentes Conicae transibunt per eandem quinq; puncta, contra Corol. 3. Lem. XX. Igitur punctum *M* versari in linea curva absolandum est. *Q. E. D.*

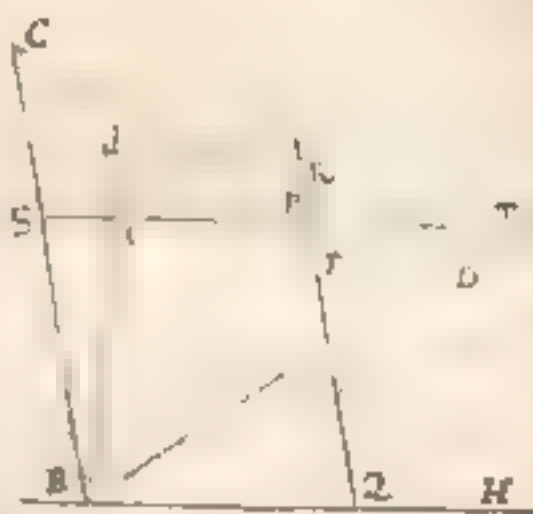
Prop. XXII. Prob. XIV.

Trajectoriam per data quinq; puncta describere

Dentur puncta quinq; *A, B, C, D, P*. Ab eorum aliquo *A* ad alia duo quavis *B, C*, iuxta poli nomenclatur, age rectas *AB, AC* huiusq; parallelas *IPS*, *PRQ* per punctum quartum *P*. Deinde a poli duobus *B, C* age per punctum quintum *D* infinitas duas *BDT*, *CRD*, novissime ductis *TPS*, *PRQ* (priorem priori & posteriorem posteriori) occurrentes in *T* & *R*. Deniq; de rectis *PT, PR*, acta recta *tr* ipsi *TR* parallela, abscond. quoniam

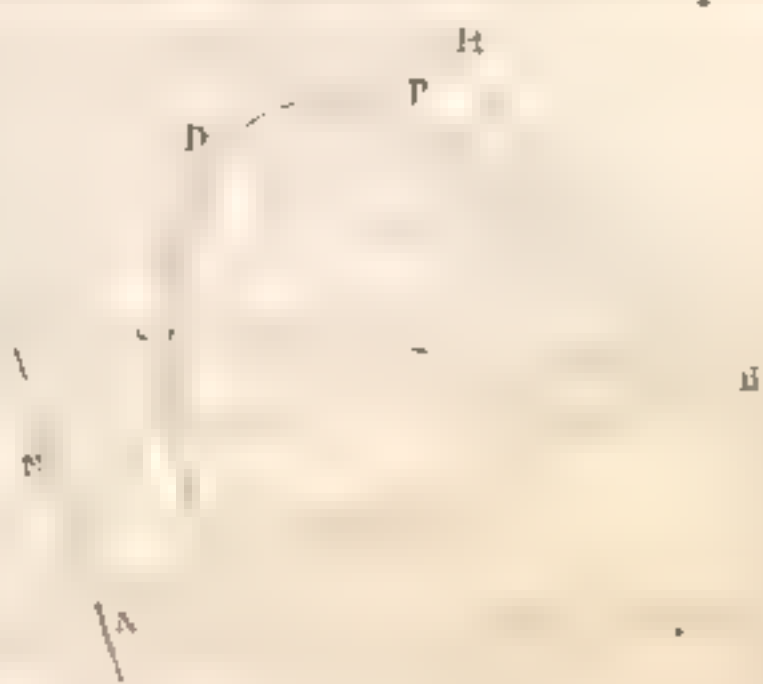


BH , & PQ parallelam BC , comple parallelogrammum $BSPQ$. Age BD secantem SP in T , & CD secantem PQ in R . Deniq; agendo quamvis tr ipsi TR parallelam, de PQ , PS abicinde Pr , Pt ipsis PR , PT proportionales respective; & actuum Cz , Bt concursus d (per Corol. 2. Lem. XX) incidet semper in Trajectoriam describendam.



Idem alter.

Revolvatur tum angulus magnitudine datus CBH circa polum B , tum radius quilibet rectilineus & utrinq; productus DC circa polum C . Notentur puncta M , N in quibus anguli crus BC secat radium illum ubi crus alterum BH concurret cum eodem radio in punctis D & P . Deinde ad aſam infinitam MN currant perpetuo radius ille CP vel CD & anguli crus CB , & cru-

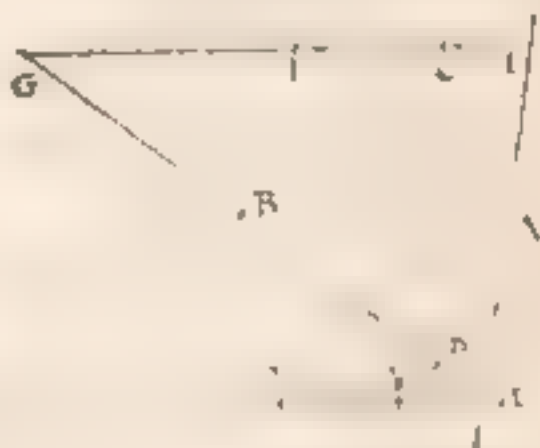


cruris alterius BH concursus cum radio delineabit Trajectoriam quæsitam.

Nam si in constructionibus Problematis superioris accedat punctum A ad punctum B , lineæ CA & CB coincident, & lineæ AB in ultimo suo situ fiet tangens BH , atq; adeo constructiones ibi positæ evadent eadem cum constructionibus huc descriptis. Delineabit igitur cruris BH concursus cum radio sectionem Conicam per puncta C, D, P transeuntem, & rectam BH tangentem in puncto B . $Q. E. F.$

Cas. 2. Dentur puncta quatuor B, C, D, P extra tangentem HI sita. Jungebina BD, CP concurrentia in G , tangentiq; occurrentia in H & I . Se-

cetur tangens in A , ita ut sit HA ad AI , ut est rectangulum sub media proportionali inter BH & HD & media proportionali inter CG & GP , ad rectangulum sub media proportionali inter PI & IC & media proportionali inter DG & GB , & erit A punctum contractus. Nam si rectæ PI parallela HX



trajectoriam accet in punctis quibuscumque X & Y erit (ex Conicis) HA quod ad AI quod ut rectangulum XHY ad rectangulum BHD (seu rectangulum CGP ad rectangulum DGB) & rectangulum in BHI ad rectangulum PIC conuertitur. Invento autem contractus puncto A , describetur Trajectoria ut in casu primo. $Q. E. F.$ Cap. a. t. n. potest punctum A vel inter puncta H & I , vel extra, & perinde Trajectoria dupliciter describi.

Hiscæ autem inventis, Trajectoria describentur et in casu primo
Problematis superioris. Q. E. F.

Lemma XXII.

Figuras in alias eiusdem generis figuras mutare

Transmutanda sit figura quævis HGI . Ducantur pro lubitu rectæ duæ parallelæ AO , BL tertiam quamvis positione datam AB secantes in A .

tam AB secantes in A
& B , & a figuræ punc-

to quovis G , ad rectam AB ducatur GD , ipsi OA parallela. Deinde a puncto aliquo O in linea OA dato ad punctum D ducatur recta OD , ipsi BL occurrens in d , & a puncto occurrus erigatur recta gd , data quovis aliam cum recta BL continens, atq; cum gd rationem ad Od quam habet GD ad OD , & cum g parallela rectae BL puncto g responderet. Eadem ratio a puncto g ad BL ducatur prima dabit recta tota in figura nove. Accipe item punctum G motu continuo percurrere punctum novum g respondens, & punctum g motu eodem continuo percurrere punctum d in recta OD & eadem de recta. OD autem tota in figura ODG erectam primam, dg ordinatam novam, BD abscissam primam, Bd abscissam novam, O polum, OD radii abscissam, OA radii erectam primum & Oa (quo parallela terminam OA & BL completur) radii ordinatam rectam.

Dico quod si linea curva sit in linea recta per punctum
datam, punctum illud erit in linea recta per punctum datum.

figura prima, hæc recta translata tanget lineam curvam in figura nova & contra. Nam si Curvæ puncta quævis duo accedant ad invicem & coeunt in figura prima, puncta eadem translata coibunt in figura nova, atq; adeo rectæ, quibus hæc puncta junguntur simul, evadent curvarum tangentes in figura unaq;. Componi possent harum assertionum Demonstrationes more magis Geometrico. Sed brevitati consulo.

Igitur si figura rectilinea in aliam transmutanda est, falsi & rectarum intersectiones transferre, & per easdem in figura nova lineas rectas ducere. Sin curvilineam transmutare oportet, transferenda sunt puncta, tangentes & aliæ rectæ quarum ope Curva linea definitur. Intervit autem hoc Lemma solutioni difficiliorum Problematum, transmutando figuras propositas in simpliciores. Nam rectæ quævis convergentes transmutantur in parallelas, adhibendo pro radio ordinato primo AO lineam quamvis rectam, quæ per concursum convergentium transit: id adeo quia concursus ille hoc pacto abit in infinitum, lineæ autem parallelæ sunt quæ ad punctum infinite distans tendunt. Postquam autem Problema solvitur in figura nova, si per inversas operationes transmutetur hæc figura in figuram primam, habebitur solutio quæsitæ.

Utile est etiam hoc Lemma in solutione Solidorum problematum. Nam quoties dux sectiones conicæ obvenierint, quarum intersectione Problema solvi potest, transmutare licet unum eorum in circulum. Recta item & sectio Conica in constructione planorum problematum vertuntur in rectam & circulum.

Prop. XXV. Prob. XVII.

Trajectoriam describere quæ per data duo puncta transit & rectas tres continget positione datæ.

Per concursum tangentium quarumvis duarum cum se invicem, & concursum tangentis tertiæ cum recta illa, quæ per puncta duo
data

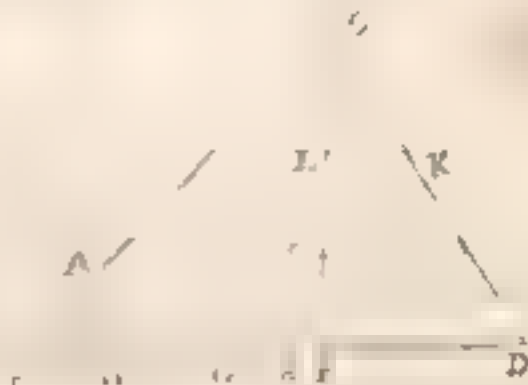
Prop. XXVI. Prob. XVIII.

Trajectoriam describere que transibit per punctum datum & rectas quatuor positione datas continget.

Ab intersectione communium duarum quacunque tangentium ad intersectionem communem reliquarum duarum agatur recta infinita, & eadem pro radio ordinato primo adhibita, transfertur figura (per Lem. XXII) in figuram novam, & Tangentes binæ, quæ ad radium ordinatum concurrerant, jam evadent parallele. Sunt illæ bi & kl , ik & bl continentes parallelogrammum $bikl$. Sitq; p punctum in hac nova figura, puncto in figura prima dato respondens. Per figuræ centrum O agatur pq , & existente Oq æquali Op , erit q punctum alterum per quod sectio Conica in hac figura nova transire debet. Per Lemmatis XXII operationem inversam transferatur hoc punctum in figuram primam, & ibi habebuntur puncta duo per quæ Trajectoria describenda est. Per eadem vero describi potest Trajectoria illa per Prob. XVII. Q. E. F.

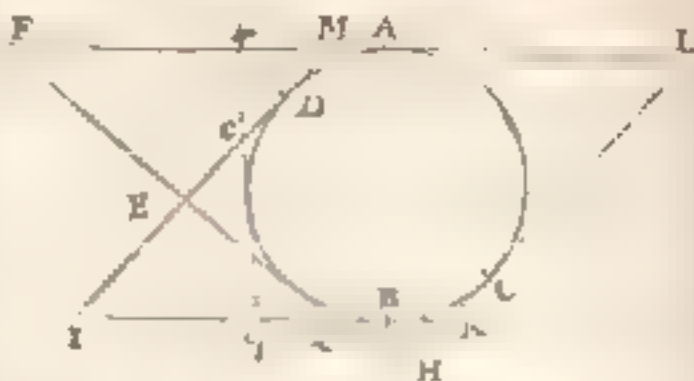
Lemma XXIII.

Si rectæ duæ positione datae AC , BD ad data puncta A , B terminentur, datamq; habeant rationem ad invicem, & recta CD , qua puncta indeterminata C , D junguntur, secetur in ratione data in K dico quod punctum K locabitur in recta positione data.



Concurrent enim rectæ AC , BD in E , & in BF capiatur BG ad AE ut est BD ad AC , sitq; FD æqualis EG , & erit EC ad GD ,
N

KL, MI sectionem Conicam in A, B, C, D , & secet tangens
quinta FQ hac latera in F, Q, H & E : dico quod sit ME ad
 MI ut BK ad KQ ,
& KH ad KL ut
 AM ad MF . Nam
per Corollarium
Lemmatum superio-
ris, est ME ad MI
ut AM seu BK ad
 BQ , & componen-
do ME ad MI ut
 BK ad KQ, Q, E .



D. Item KH ad HL ut BK seu AM ad AF , & dividendo
 KH ad KL ut AM ad $MF, Q, E, D. \times$

Corol. 1. Hinc si parallelogrammum $IKLM$ datur, dabitur
rectangulum $KQ \times MF$, ut & hinc aequale rectangulum $KH \times$
 MF . Aequantur enim rectangula illa ob similitudinem trianguli-
orum KQH, MFE .

Corol. 2. Et si recta ducatur tangens eq tangenti ubi KI, MI
occurrent in e & q , rectangulum $KQ \times MF$ erit aequale
rectangulo $Ke \times Me$, eaq; KQ ad Me ut Ke ad MF , & dividendo ut Qq
ad Fe .

Corol. 3. Unde etiam si Eq, eQ jungantur & bisecentur, &
recta per puncta bisectionum agatur, transibit hac per centrum
sectionis Conicae. Nam cum sit Qq ad Ee ut KQ ad Me ,
transibit eadem recta per medium omnium F, K, e, Q, A, H (per
Lemma XXIII) & medium rectae MI est centrum sectionis.

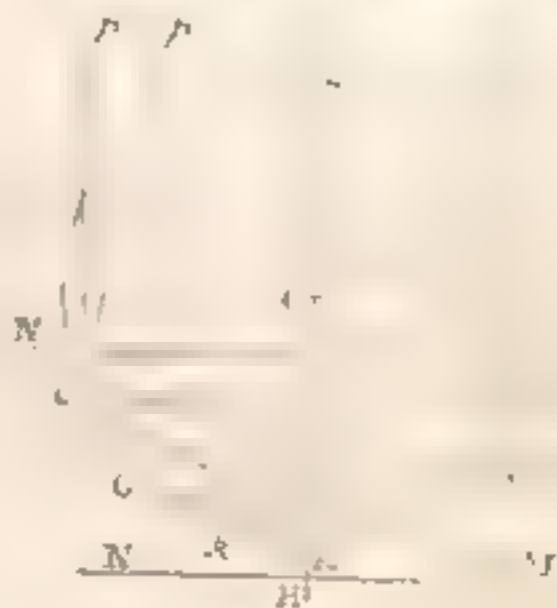
Prop. XXVII. Prob. XIX.

Trajectoriam describere quae rectas quinq; positione datis continget

Dentur positione tangentes $ABG, BCF, GCD, FDE,$
 EA . Figuræ quadrilatera sub quatuor quibusvis contenta $AB,$
 $FE,$

Problemata, ubi dantur Trajectoriae vel centra vel *Asymptoti*, vel dantur ut p. accedentibus. Nam datis punctis & tangen-
tibus ut a centro, dantur alia totidem pariter abaeq, tangentes
a centro ex altera eius parte aequaliter distante. *Asymptotos*
autem pro tangente habenda est, & eius terminus infinite distans
(si ita loqui tibi sit) pro puncto contactus. Concipe tangentem
cum illo punctum contactus accedente in infinitum, & tangens vert-
tur in *Asymptoton*, atq. constructiones Problematis XV & Cuius
primi Problematis XIV vertentur in constructiones Problematum
ubi *Asymptoti* dantur.

Postquam Trajectoria descripta est, invenire licet axes & umbili-
cos eius hac methodo. In constructione & Figura Lemmatis XXI,
sic ut angulorum mobi-
lium PBN , PCN crura
 BP , CP quorum
concursum Trajectoria de-
scribatur sine sibi in-
vicem parallela, eumq;
servantia sicut revol-
vantur circa polos suos
 B , C in figura illa. In-
terea vero describant
altera angulorum illo-
rum crura CN , BN , con-
currentia in A vel K cir-
culum $IBKGC$. Sit
circuli huius centrum O

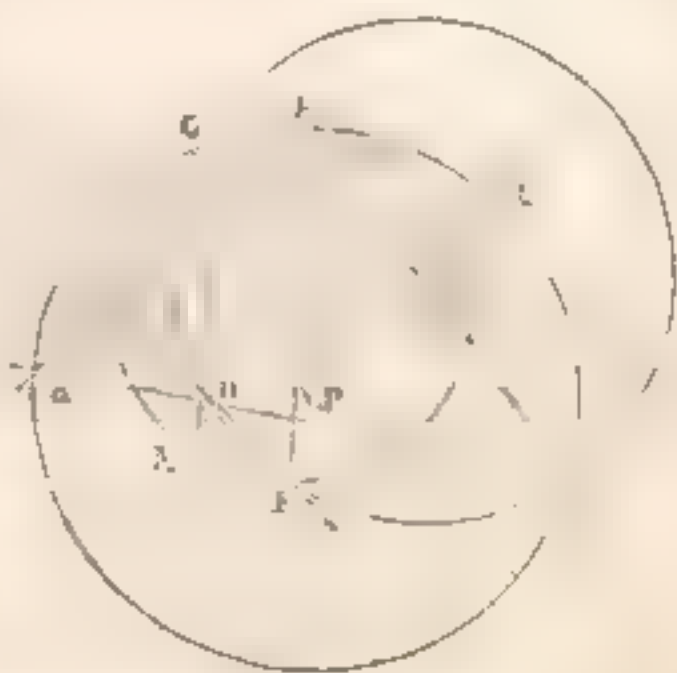


Ad hoc centra J & I dantur IN , ad quam altera illa crura CN ,
 BN interea con-
currentia in I & J describatur, & inter-
sectio in O & H dabitur. Et ubi crura

angulus E lineam AC , & angulus F lineam BC tangat. Super DE , DF & EF describe tria circulorum segmenta DRE , DGF , EMF , quæ capiant angulos angulis BAC , ABC , ACB æquales respective. Describantur autem hæc segmenta ad eas partes linearum DE , DF , EF ut literæ $DRED$ eodem ordine cum literis BAC , literæ $DGFD$ eodem cum literis ABC , & literæ $EMFE$ eodem



cum literis $ACBA$ in orbem redeant: deinde compleantur hæc segmenta in circulos. Secent circuli duo priores se mutuo in G , sintq; centra eorum P & Q . Junctis GP , PQ , cape Ga ad AB ut est GP ad PQ , & centro G , intervallo Ga describe circulum, qui secet circulum primum DGE in n . Jungatur tum aD secans circulum secundum DI in b , tum aE secans circulum tertium GE in c . Et compleatur figura abc DEF similis & æqualis figuræ ABC def . Dico factum.



Agatur enim Fe ipsi aD occurrens in n . Jungantur aG , bG ,

LC , PD , QD & producat PQ ad R . Ex constructione est
 angulus EaD æqualis angulo CAB , & angulus FcF æqualis an-
 gulo ACB , adeoq; triangulum anc triangulo ABC æquangu-
 lum. Ergo angulus anc seu FaD angulo ABC , adeoq; angulo
 FbD æqualis est, & propterea punctum n incidit in punctum
 b . Porro angulus GPQ , qui dimidius est anguli ad centrum G -
 PD , æqualis est angulo ad circumferentiam GaD , & angulus G -
 QR , qui dimidius est complementi anguli ad centrum GQD ,
 æqualis est angulo ad circumferentiam GbD , adeoq; eorum com-
 plementa PQG , abG æquantur, suntq; ideo triangu-
 la GPQ , Gab similia, & Ga est ad ab ut GP ad PQ , id est (ex construc-
 tione) ut Ga ad AB . A quantur itaq; ab & AB , & propterea
 triangu-
 la abc , ABC , quæ modo similia esse probavimus, sunt
 etiam æqualia. Unde cum tangant utriusq; trianguli DEF an-
 tili D, E, F trianguli abc latera ab , ac , bc respective, compleri
 potest figura $AbC def$ figuræ $abc DEF$ similis & æqualis, atq;
 eam complendo solvetur Problema. $Q.E.F.$

Corol. Hinc recta duci potest cuius partes lon-
 gitudine datæ rectis
 tribus positione datis intersciantur. Concipe Triangulum DEF ,
 puncto D ad latus EF accedente, & lateribus DE , DF in di-
 rectam positæ, mutari in lineam rectam, cuius pars data DE , sec-
 tis positione datis AB , AC , & pars data DF rectis positione da-
 tis AB , BC intersciantur debet, & applicando constructionem præ-
 cedentem ad hunc casum solvetur Problema.

Prop. XXVIII. Prob. XX.

*Trajectoriam speciem & magnitudinem datam describere, cuius partes
 datæ rectis tribus positione datis intersciantur.*

Describenda sit Trajectoria quæ sit in ls & æqualis hinc ex
 DE , quæ a rectis tribus AB , AC , BC positione datis, in
 O par-

*triangle = QPD ob
 latera Triang. PQR
 lateribus Triang.
 PQR singula singulis
 - PQ communibus
 yne*

partes datis huius partibus DE & EF similes & æquales secabitur.
Age rectas DE, EF, DF , & trianguli huius DEF pone angu-

c.

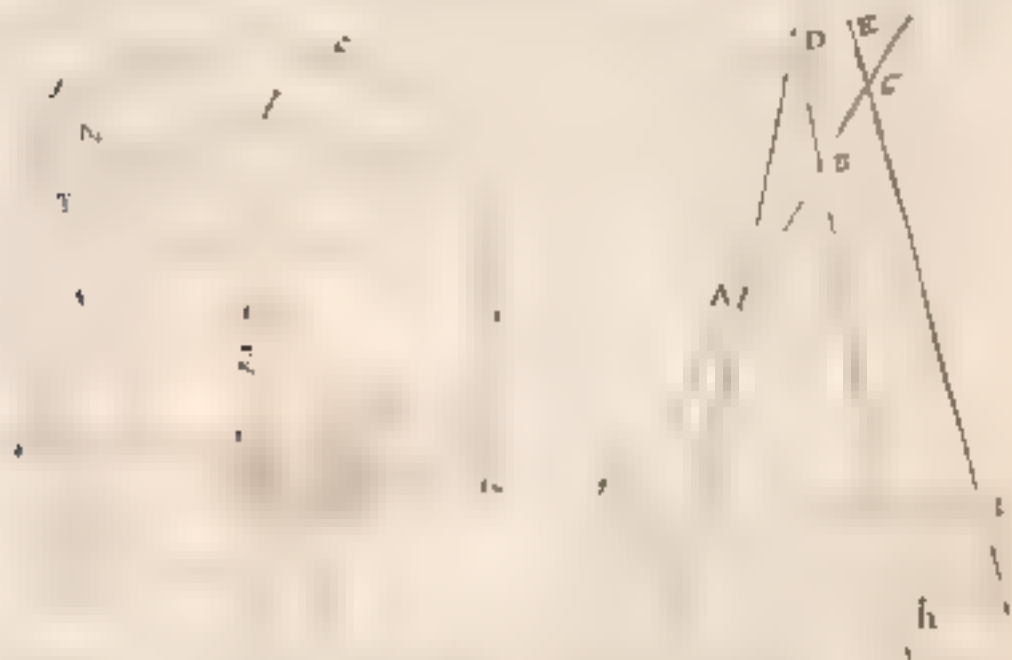
los D, E, F ad rectas illas positione datas (per Lem. XXVI)
Dein circa triangulum describe Trajectoriam curvæ DEF simi-
lem & æqualem. $Q.E.D.$

Lemma XXVII.

Trapezium specie datum describere cuius anguli ad rectas quatuor po-
sitione datas (quæ neq. omnes parallelæ sunt, neq. ad commune
punctum convergunt) singuli ad singulas consistant

Dantur positione rectæ quatuor ABC, AD, BD, CF , qua-
rum prima tectet secundam in A , tertiam in B , & quartam in C
& describendum sit Trapezium $fgbi$ quod sit Trapezium $FGHI$
simile & cuius angulus f angulo dato F æqualis sit & ceteris $A-$
 BC , ceteriq. anguli g, b, i ceteris angulis datis G, H, I æqualis
tangant ceteras lineas AD, BD, CF respective. Iam ut f IHI ,
& b per IG, IH, FI describantur totidem circuli in h puncta
 FSG, FHI, FFI , quorum primum FSG capiat angulum æqua-
lem angulo BAD , secundum FHI capiat angulum æqualem an-
gulo CBF , & tertium FFI capiat angulum æqualem angulo $AC-$
 F

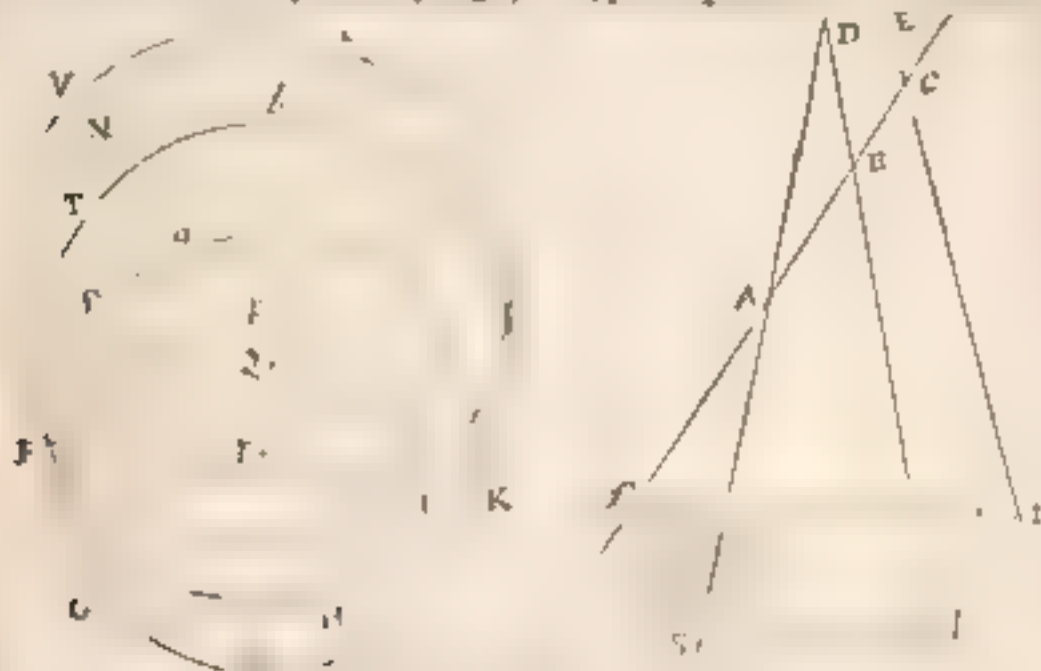
E. Describi autem debent segmenta ad eas partes linearum FG , FH , FI , ut literarum $\Gamma S G F$ idem sit ordo circularis q. a literarum $B A D B$, utq. literæ $F T H F$ eodem ordine cum literis $C B E C$, & literæ $F V I F$ eodem cum literis $A C F A$ in orbem redeant. Compleantur segmenta in circulo, sitq. P centrum circuli primi $F S G$, & Q centrum secundi $F T H$. Jungatur & utraq.



producat PQ , & in e recipiat QR in e ratione ad PQ quam habet BC ad AB . Cipe autem QR ad eas partes puncti Q ut literarum P, Q, R idem sit ordo circularis atq. literarum A, B, C , centroq. R & intervallo $R F$ describat circulus quartus Γ . Ne secans circulum tertium $\Gamma F I$ in e . Jungatur Γe secans circulum primum in a & secunda in b . Agantur $a G, b H, c I$, & figure $abc F G H I$ & $fg h i$ constructæ. Sima $ABC f g h i$. Eritq. Trapezium $f g h i$ illud ipsum quod construere oportuit.

Secent enim circuli duo primi $\Gamma S G, F T H$ se mutuo in K . Jungantur $P K, Q K, R K, a K, b K, c K$ & producat $Q P$ ad

L. Anguli ad circumferentias FaK , FbK , FcK sunt semisses angulorum FPK , FQK , FRK ad centra; adeoq; angulorum illorum dimidus LPK , LQK , LRK æquales. Fît ergo figura $PQRK$ figuræ $abcK$ æquiangula & similis, & propterea ab est ad bc ut PQ ad QR , id est ut AB ad BC . Angulus insuper FaG , FbH , FcI æquantur fAg , fBb , fCi per constructionem.



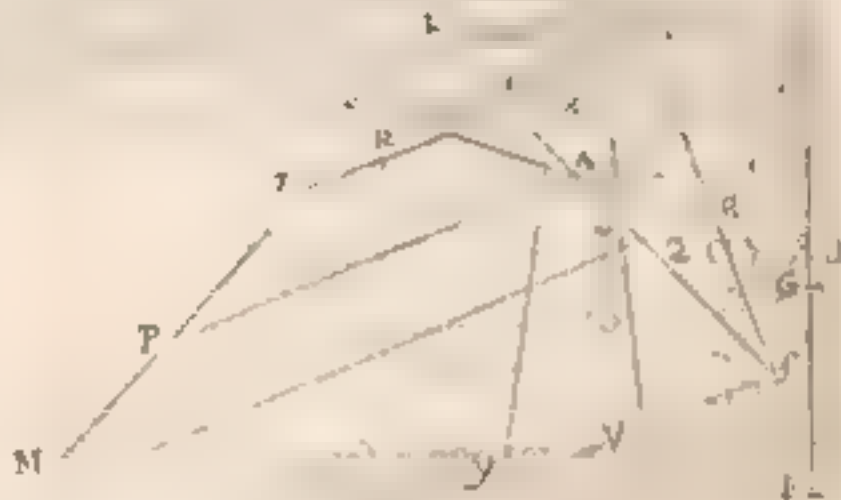
Ergo figuræ abc $FGHI$ figura similis ABC $fghi$ compleri potest. Quo facto Trapezium $fghi$ constituetur simile Trapezio $FGHI$ & angulis suis f , g , h , i tanq; rectas AB , AD , BD , CF QF F

Corol Hinc recta duci potest cuius partes, rectis quatuor positione datis dato ordine interjectæ, datam habeant proportionem ad invicem. Augeantur anguli I GHI usq; eo, ut recta FG , GH , HI in directum jaceant, & in hoc casu concludendo Problema, duceatur recta $fghi$ cuius partes fg , gb , bi , rectis quatuor positione datis AB & AD , AD & BD , BD & CF interjectæ, erant ad invicem ut linea FG , GH , HI , eundemq; servabunt ordinem inter se. Idem vero sic fit expeditus.

Pro-

Producantur AB ad K , & BD ad L , ut sit BK ad AB ut HI ad GH , & DL ad BD ut GI ad FG , & jungatur KL occurrens rectæ CE in z . Producat zL ad M , ut sit LM ad zL ut GH ad HI , & agatur cum MQ ipsi LB parallela rectaq; AD occurrens in g , cum g secans AB , BD in f , b . Dico factum.

Secet enim Mg rectam AB in Q , & AD rectam KL in s , & agatur AP , quæ sit ipsi BD parallela & occurrat zL in P , & erunt Mg ad Lb (Mz ad Lz ut gh ad hi , AK ad BK) & AP ad $B-L$ in eadem



ratione. Secetur DL in R ut sit DL ad RL in eadem illa ratione, & ob proportionales gS ad gM , AS ad AP , & DS ad DL , erit ex æquo ut gS ad Lb ita AS ad BL & DS ad RL , & mixta, $BL - RL$ ad $Lb - BL$ ut $AS - DS$ ad $gS - AS$. Id est BK ad Bb ut AD ad Ag , adeoque ut BD ad gQ . Et vicissim BK ad BD ut Bb ad gQ seu fb ad fg . Sed ex constructione est BK ad BD ut FH ad FG . Ergo fb est ad fg ut FH ad FG . Cum igitur ut etiam fg ad fb ut Mz ad Lz , id est, ut IG ad IH , patet lineas FI , fi in g & b , G & H simuliter secas esse. Q. E. F.

In constructione Corollarii hujus postquam ducitur LK secans

EC

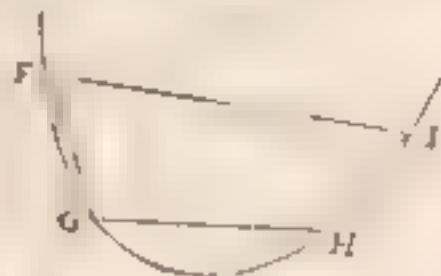
CE in ι , producere licet ιE ad V , ut sit EV ad ιE ut FH ad HI , & agere Vf parallelam ipsi BD . Eodem recidit si centro ι , intervallo II describatur circulus secans BD in X , producat ιX ad λ , ut sit ιY æqualis IE , & agatur Yf ipsi BD parallelæ.

Prop. XXIX. Prob. XIX.

Trajectoriam specie datam describere, quæ a rectis quatuor positione datis in partes secabitur, ordine, specie & proportione datis.

Describenda sit Trajectoria $fgh\iota$, quæ similis sit lineæ curvæ $FGHI$, & cujus partes fg , gh , $h\iota$ illius partibus FG , GH , HI similes &

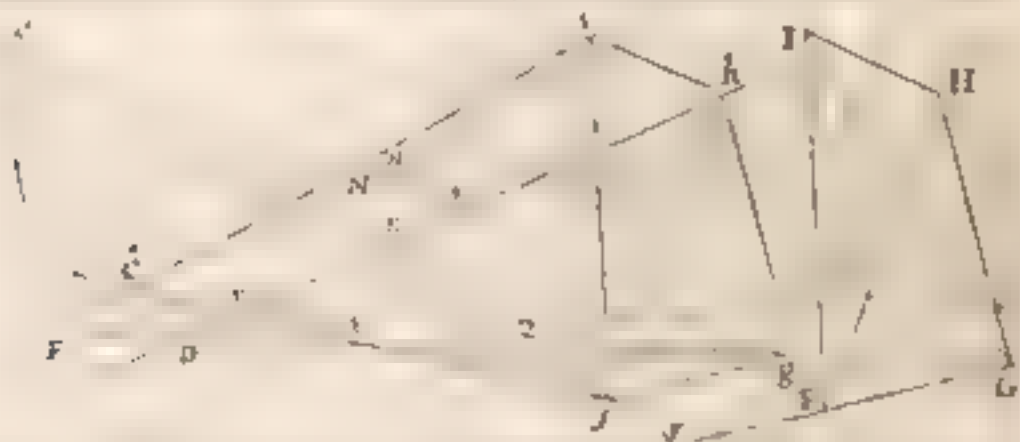
proportionales,
rectis AE
 BD & AD
 AD &
 BD , B
 D & EC



positione datis, prima primis, secunda secundis, tertia tertiis interjacent. Actis rectis FG , GH , HI , $f\iota$, describatur Trapezium $fgh\iota$ quod sit Trapezium $FGHI$ simile & cujus anguli f , g , h , etiamant recta illas positione datas AE , AD , BD , CE siquidem singulas d'ito ordine. Dem (per Lem. XXVII) circa hoc Trapezium describatur Trajectoria curvæ lineæ $FGHI$ communis.

Scholeum.

Construi etiam potest hoc Problema ut sequitur. Junctis FG , GH , HI , FI producat GF ad V , jungetq, FH , IG , & angulis FGH , VFH fac angulos CAK , DAL æquales. Concurrent AK , AL cum recta BD in K & L , & inde agantur KM , LN , quarum KM constituat angulum AKM æqualem angulo GHI , sitq, ad AK ut est HI ad GH , & LN constituat angulum ALN æqualem angulo FHI , sitq, ad AL ut HI ad IH . Ducantur autem Ak , KM , AL , LN ad eas partes linearum AD , AK , AL , ut literæ $CAMC$, AK , $DAIND$ eodem ordine cum literis $FCHIF$ in orbem redeant, & acta MN occurrat rectæ



CF in r . Fac angulum rFP æqualem angulo IGF , sitq, PF ad F ut IG ad GI , & per P agatur QPF , quæ cum recta APD continet angulum PQF æqualem angulo FIC , rectaq, AB occurrat in f , & jungatur ff . Accutur autem PF & PQ ad eas partes linearum CE , PE , & linearum PE , P & PE , QP eodem sit ordo circularis qui literæ sunt $GHIH$, & si super linea ff eodem quoq, linearum ordine constituatur e Trapezium $fghi$ Trapezio $FCHI$ simile, & ceterum tribatur Trapezium specie data, solvetur Problema.

Hactenus de orbibus invenendis. Superest ut motus corporum in orbibus inventi. Ita cunctemus

SLC-

S E C T. VI

De inventione motuum in Orbibus datis.

Prop. XXX. Prob. XXII.

Corporis in data Trajectoria Parabolica moventis, invenire locum ad tempus assignatum.

Sit S umbilicus & A vertex principalis Parabolæ, sitq. $4ASx$ M area Parabolica APS, quæ radio SP, vel post excessum corporis de vertice descripta fuit, vel ante appulsus ejus ad verticem describenda est. Innoscit area illa ex tempore ipsi proportionali. Bueca AS in G, erigeq. perpendicularum GH æquale $\frac{3}{2}M$, & circulus centro H, intervallo HS descriptus, secabit Parabolam in loco qui sito P. Nam demula ad axem perp. radicali PO, est $HGq. + GSq. (=HSq. = GOq. + HG \times PO + POq.)$ Et idem totumq. $HGq.$ fiet $GSq.$ $GOq. = HG \times PO + POq.$ seu $2HG \times PO (=GOq. + POq.) = GSq. = AOq. = 2GAO + POq.)$
 $AOq. + POq.$ Pro $AOq.$ scribe $AO \times \frac{POq.}{4AS}$ & applica is terminis omnibus ad $3PO$, ductisq. in $2AS$, fiet $GH \times AS (=AO \times PO + \frac{1}{4}AS \times PO = \frac{AO + \frac{3}{4}AS}{6} \times PO = \frac{4AO - 3SO}{6} \times PO =$
 arca $APQ - SPQ$) = arca APS sed GH erat $\frac{3}{2}M$, & inde $\frac{1}{2}HG$

$HG \times AS$ est $4 AS \times M$. Ergo area APS aequalis est $4 AS \times M$ *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc GH est ad AS , ut tempus quo corpus descripsit arcum AP ad tempus quo corpus descripsit arcum inter verticem A & perpendicularum ad axem ab A ad S erectum.

Corol. 2. Et circulo ASP per corpus movens perpetuo transiente, velocitas puncti G est ad velocitatem quam corpus habuit in vertice A , ut 3 ad 8 , adeoque in ea etiam ratione est linea GH ad lineam rectam quam corpus tempore motus sui ab A ad P , ea cum velocitate quam habuit in vertice A , describere poterit.

Corol. 3. Hinc etiam vis versa inveniri potest tempus quo corpus descripsit arcum quemvis assumptum AP . Iunge AP & ad medium eius punctum erige perpendicularum rectae GH occurrens in H .

Lemma XXVIII.

Nulla extat figura Ovalis cuius area, rectis pro lubitu abscissa, possit per aequationes numero terminorum ac dimensionum finitas generaliter inveniri.

Intra Ovalem detur punctum quodvis, circa quod ceu polum revolvatur perpetuo linea recta, & interea in recta illa extat punctum mobile de polo, pergatq; semper ea cum velocitate, quae sit ut rectae illius intra Ovalem longitudo. Hoc motu punctum illud describet Spiralem curv. infinitis. Jam si area Ovals per finitam aequationem inveniri potest, invenietur etiam per eandem aequationem distantia puncti a polo, quae hinc areae proportionabilis est, adeoque etiam Spiralibus puncta per aequationem tantam inveniri possunt. & propterea, rectae cuiusvis positione data intersectio cum spirali inveniri etiam potest per aequationem finitam. Atq; si recta omnis infinite producta spiralem secat in punctis numero infinitis, & aequatio, qua intersectio aliqua duarum linearum invenitur, exhibet earum intersectiones omnes radices totidem,

ones omnes, & propterea radices habebit numero infinitas, quibus omnes exhiberi possunt. Neque etiam intersecção rectæ & spiralis per æquationem finitam generaliter inveniri, & ideo nulla exstat Ovalis cuius area, rectæ superatis absque, possit per talem æquationem generaliter exhiberi.

Eodem argumento, si intervallum poli & puncti, quo spiralis describitur, capitur Ovalis perimetro absque proportionale, probari potest quod longitudo perimetri nequit per finitam æquationem generaliter exhiberi.

Corollarium.

Hinc area Ellipseos, quæ radio ab umbilico ad corpus mobile ducto describitur, non prodit ex dato tempore, per æquationem finitam, & propterea per descriptionem Curvarum Geometricè rationalium determinari nequit. Curvas Geometricè rationales appello quarum puncta omnia per longitudines æquationibus definitas, id est, per longitudinum rationes complicatas, determinari possunt, ceterasq. (ut Spirales, Quadratrices, Trochoides) Geometricè irrationales. Nam longitudines quæ sunt vel non sunt ut numerus ad numerum (quemadmodum in decimo Elementorum) sunt Arithmetice rationales vel irrationales. Arcum igitur Ellipseos tempori proportionalem abieciendo per Curvam Geometricè rationalem ut sequitur

.Prop. XXXI. Prob. XXIII.

Corporis in data Trajectoria Elliptica moventis invenire locum ad tempus assignatum.

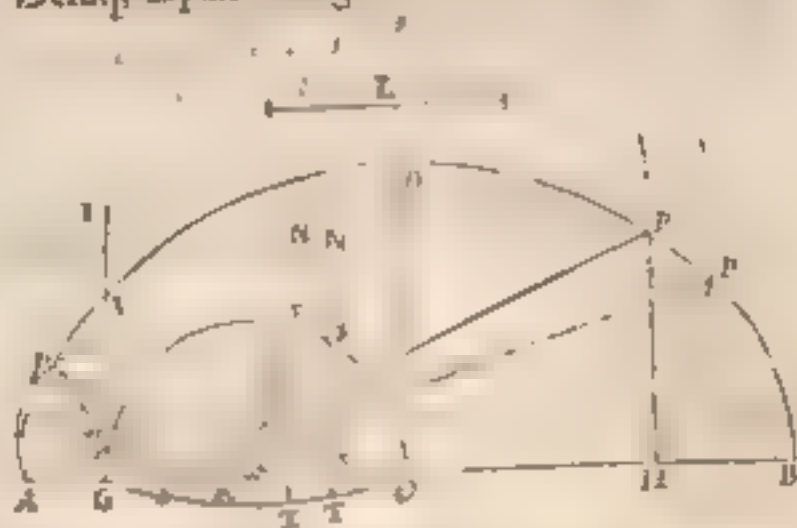
Ellipseos APB sit A vertex principalis, S umbilicus, O centrum, sitq. P corporis locus invenendus. Producat OA ad G ut sit OG

P 2

ad

Scholium.

Ceterum ob difficultatem describendi hanc curvam praestat constructiones vero proximas in praxi Mechanica adhibere Ellipticos cuiusvis APB sit AB axis maior, O centrum, S umbilicus, OD semiaxis minor, & AK dimidium lateris recti. Secetur AS in G , ut sit AG ad AS ut BO ad BS , & quærat^r longitudo L , quæ sit ad $\frac{1}{2} CK$ ut est AO quad^a ad rectangulum $AS \times OD$. Bisegetur OG in C , centroq^{ue} C & intervallo CG describatur semicirculus GFO . Deniq^{ue} capiatur angulus CCF in ea ratione ad angulos quatuor rectos, quam habet tempus datum, quo corpus descripsit arcum quæsitum $A-P$, ad tempus periodicum seu revolutionis unius in

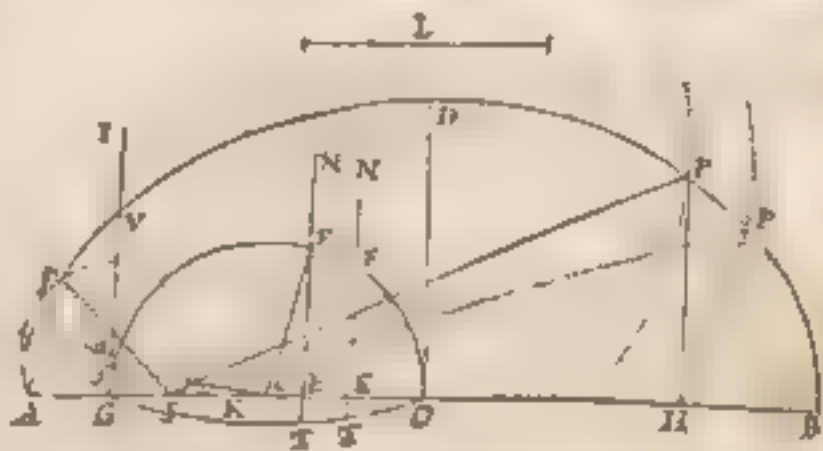


Ellipsi Ad AO demittatur normalis FE , & producat^r eadem versus F ad usq^{ue} N , ut sit LN ad longitudinem L , ut anguli illius sinus $E F$ ad radium $C F$, centroq^{ue} N & intervallo AN descriptus circulus secabit Ellipsin in corporis loco quæsito P quam proxime.

Nam completo dimidio temporis periodici, corpus P semper reperietur in Ap^side summa B , & compl^{et} to altero temporis dimidio, red^{it} ad Ap^sidem imam, ut oportet. Ubi vero proxime abest ab Ap^sidibus, ratio prima nascentium iectionum ASP , CCF , & ratio ultimarum evanescentium BSP & OCF , eadem est rationi Ellipticos totus ad circulum totum. Nam punctis

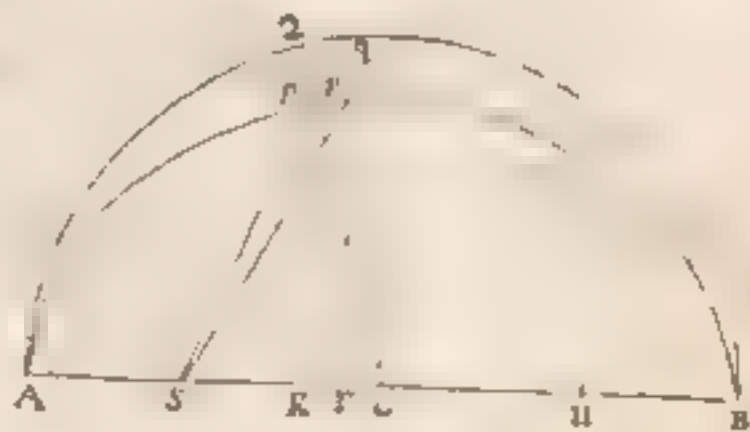
P ,

P , F & N incidentibus in loca p , f & n axi AB quam proximus, ob æquales An , pn , recta nq , quæ ad arcum Ap perpendicularis est, adeoque concurrens cum axe in puncto K^* , bisecat arcum Ap . Proinde est : Ap ad Gn ut AK ad GK , & Ap ad Gn ut $\frac{1}{2} AK$ ad GK . Est & Gn ad Gf ut EN ad EF , seu L ad CF , id est, ut $\frac{GK \times AO q}{\frac{1}{2} AS \times OD}$ ad CF , seu $GK \times AO q.$ ad $\frac{1}{2} AS \times OD \times CF$, & ex æquo Ap ad Gf ut $\frac{1}{2} AK$ ad $GK + GK \times AO q.$ ad $\frac{1}{2} AS \times OD \times CF$, id est, ut $AK \times AO q.$ ad $AS \times OD \times CF$, hoc est, ob æqualia $AK \times AO$ & $OD q$ ut $AO \times OD$ ad $AS \times CF$. Proinde $Ap \times \frac{1}{2} AS$ est ad $Cf \times CC$ ut $AO \times OD \times AS$ ad $AS \times CF \times CC$, seu $AO \times OD$ ad $CC q.$ id est, sector nascentis AS p ad sectorem nascentem CCf ut $AO \times OD$ ad $CG q$ & propterea ut area Ellipticos totius ad arcam circuli totius. Q.E.D. Argumento proximè probari potest analogia ultima in Sectoribus evanescerentibus BSP , OCT . Ideoque locus puncti P prope Apfides latis accurate inventus est. In quadraturis error quasi quingentesima partis arcus Ellipticos totius vel paulo major obvenire solet: qui tamen propemodum evanescet per ulteriorem Constructionem sequentem.



Per puncta G, O , due arcum circulearem GTO iuste magnitudinis, dein produc EF hunc inde ad $I \& N$ ut sit EN ad FI ut L ad CF , centroq. N & intervallo AN describe circulum qui flect Ellipfin in P , ut supra. Arcus autem GTO determinabitur quæ-

te AC radio. Sufficit angulum illum rudi calculo in numeris proximis invenire. Cognoscatur etiam angulus tempori proportionalis, id est, qui sit ad quatuor rectos ut est tempus quo corpus descripsit arcum AP , ad tempus revolutionis unius in Ellipti. Sit angulus iste N . Tum capiatur & angulus D ad angulum B , ut est sinus iste anguli ACQ ad Radium, & angulus E ad angulum $N - ACQ + D$, ut est longitudo L ad longitudinem eandem L cosinu anguli $ACQ + \frac{1}{2} D$ diminutam, ubi angulus iste recto minor est, auctam ubi major. Postea capiatur tum angulus F ad angulum B , ut est sinus anguli $ACQ + E$ ad radium, tum angulus G ad angulum $N - ACQ - E + F$ ut est longitudo L ad Longitudinem eandem cosinu anguli $ACQ + E + \frac{1}{2} F$ diminutam ubi angulus iste recto minor est, auctam ubi major. Tertia vice capiatur angulus H ad angulum B , ut est sinus anguli $ACQ + E + G$ ad radium, & angulus I ad angulum $N - ACQ - E - G + H$, ut est longitudo L ad eandem longitudinem cosinu anguli $ACQ + E + G + \frac{1}{2} H$ diminutam, ubi angulus iste recto minor est, auctam ubi major. Et sic pergere licet in infinitum. Denique capiatur angulus ACQ æqualis angulo $ACQ + E + G + I$ &c. & ex cosinu eius Cr & ordinata pr , quæ est



ab initium qr ut Ellipticos axis minor ad axem maiorem, habeatur corporis locus correctus p . Si quando angulus $N - ACQ + D$ negativus est, debet signum $+$ ipsius E ubiq. mutari in $-$, & signum $-$ in $+$. Idem intelligendum est de signis ipsorum G & I , ubi anguli $N - ACQ - E + F$, & $N - ACQ - E - G + H$ nega-

tive prodeunt. Convergit autem series infinita $ACQ + E + G + I$ quam celerrime, adeo ut vix unquam opus fuerit ultra progredi quam ad terminum secundum E . Et fundatur calculus in hoc Theoremate, quod area APS sit ut differentia inter arcum AQ & rectam ab umbilico S in Radium CQ perpendiculariter demissam.

Non dissimili calculo conficitur Problema in Hyperbola. Sit ejus centrum C , Vertex A , Umbilicus S & Asymptotos CK . Cognoscatur quantitas aree APS temporis proportionalis. Sit ea A , & fiat conjectura de positione recte SP , quae aream illam abscondat quamproxime. Jungatur CP , & ab A & P ad Asymptoton agantur AI , PK Asymptoto alteri parallela, & per Tabulam Logarithmorum dabitur Area $AIKP$, eiq, aequalis area CPS , quae subducta de triangulo CPS relinquet aream APS . Applicando arearum A & APS semidifferentiam: $APS - A$ vel: $A - APS$ ad lineam SN , quae ab umbilico S in tangentem PT perpendicularis est, orietur longitudo PQ . Capiatur autem PQ inter A & P , si area APS major sit area A , secus ad puncti P contrarias partes. & punctum Q erit locus corporis accuratius. Et computatione repetita invenietur idem accuratius in perpetuum.



Atq, his calculis Problema generaliter confit Analytice. Verum usibus Astronomicis accommodatior est calculus particularis qui sequitur. Existentibus AO , OB , OD semiaxibus Ellipseos, (Vide fig. pag. 109. 110.) & L ipsius latere recto, quare cum angulum Y , cujus Tangens sit ad Radium ut est semiaxium differentia $AO - OD$ ad eorum summam $AO + OD$; tum angulum Z , cujus tangens sit ad Radium ut rectangulum sub umbilicorum distantia SH & semiaxium differentia $AO - OD$ ad triplum rectangulum sub OQ semiaxe minore & $AO - L$ differentia inter semia-

maximam maiorem & quartam partem lateris recti. His angulis semel inventis, locus corporis sic deinceps determinabitur. Sume angulum T proportionalem tempori quo arcus BP descriptus est, seu motui medio (ut loquuntur) aequalum, & angulum V (primam medium motus aequationem) ad angulum I (aequationem maximam primam) ut est sinus anguli T duplicatus ad radium, atq. angulum X (aequationem secundam) ad angulum Z (aequationem maximam secundam) ut est sinus versus anguli T duplicatus ad radium duplificationem, vel (quod eodem modo est) ac est quadratus sinus anguli T ad quadratum Radium. A. gaturum T, I, X vel si non max $T + X + I$, si angulus T recto minor est, vel si differant $T + X - I$, si is recto minor est rectusq. duobus minor, aequalum cape angulum in BHP (motum medium aequatum,) & si HP occurrat Elipsi in P , ad A SP ab eundem aream BSP tempori proportionalem quam proximè. Hoc Praxis satis expedita videtur, propterea quod angulo um per angulum I & X (in minutis secendis, si placet, posito um) si utras duas treve prima invenire sufficit. Invento autem angulo motu in T quoti BHP , angulus veri motus HSP & distans AP , promeruit per methodum non lineam Datis. *Sed et Hic et Tunc* per se habueris mihi plurimum colendi.

Itaque ut de motu corporum in lineis curvis. Eadem autem potest et in recta descendat vel recta ascendat, & quæ ad istiusmodi motus spectant, pergo iam exponere

S E C T. VII.

De Corporum Ascensu & Descensu Rectilineo.

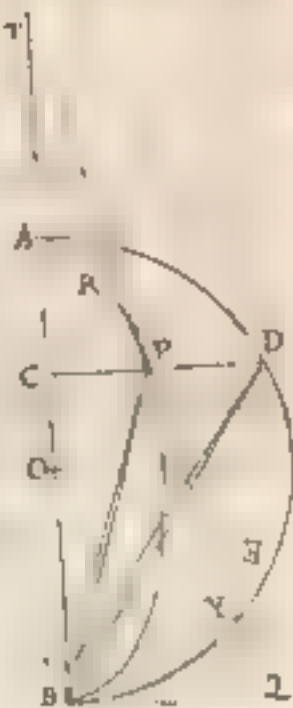
Prop. XXXII. Prob. XXIV.

Posito quod vis centripeta sit reciproce proportionalis quadrato distantie locorum a centro, spatia definire quæ corpus recta cadendo datis temporibus describit.

Cas. 1. Si corpus non cadit perpendiculariter describet id sectionem aliquam Conicam cuius umbilicus inferior congruit cum centro. Id ex Propositionibus XI, XII, XIII & earum Corollaris constat. Sit sectio illa Conica $AKPB$ & umbilicus inferior S . Et primo si Figura illa Ellipsis est, super huius axe maiore AB describatur semicirculus ADB , & per corpus decidens transeat recta DPC perpendicularis ad axem, ætq. DS , PS erit area ASD area ASP atq. adeo etiam tempori proportionalis. Manente axe AB immutatur perpetuo latitudo Ellipsis, & semper erit area ASD tempori proportionalis. Mutatur latitudo illa in infinitum, & orbe ADB jam coincidente cum axe AB & umbilico S cum axis termino B , descendet corpus in recta AC , & area ABD evadet tempori proportionalis. Dabitur itaq. spatium Ac , quod corpus de loco A perpendiculariter cado tempore dato describit, si modo tempori proportionales capatur area ABD , & a puncto D ad rectam AB demittatur perpendicularis DC . *Q. E. I.*

Q. 2

Cas



Namq; ob proportionales CD , CP , linea AB communis est utriusq; figuræ RPB , DEB diameter. Bisecetur eadem in O , & agatur recta PT quæ tangat figuram RPB in P , atq; etiam secet communem illam diametrum AB (si opus est productam) in T , sitq; ST ad hanc rectam & BQ ad

hanc diametrum perpendicularis, atq; figuræ RPB latus rectum ponatur L . Constat per Cor. 9. Theor. VIII. quod corporis in linea RPB circa centrum S moventis velocitas in loco quovis P sit ad velocitatem corporis intervallo SP circa idem centrum circulum describentis in dimidiata ratione rectanguli $\frac{1}{2} L \times SP$ ad ST quadratum. Est autem ex Conicis ACB ad CPq , ut $2AO$ ad L , adeoq; $\frac{2CPq \times AO}{ACB}$ æquale L . Ergo ve-

locitates illæ sunt ad invicem in dimidiata ratione $\frac{CPq \times AO \times SP}{ACB}$ ad ST quad. Porro

ex Conicis est CO ad BO ut BO ad TO , & composite vel divisi ut CB ad BI . Unde dividendo vel componendo fit $BO \sim$ vel $+CO$ ad BO ut CT ad BT , id est AC ad AO ut CP ad BQ , indeq; $\frac{CPq \times AO \times SP}{ACB}$ æquale est $\frac{BQq \times AC \times SP}{AO \times BC}$. Minuatun

jam in infinitum figuræ RPB latitudo CP , sic ut punctum P coeat cum puncto C punctumq; S cum puncto B , & linea SP cum linea BC , lineaq; ST cum linea BQ , & corporis jam rectæ descendentis in linea CB velocitas fiet ad velocitatem corporis centro B intervallo BC circulum describentis, in dimidiata ratione ipsius $\frac{BQq \times AC \times SP}{AO \times BC}$ ad STq . hoc est (neglectis æqualitatis rationibus

SP ad BC & BQq ad STq) in dimidiata ratione AC ad AO .
 $Q. E. D.$ Corol.

Corol. Punctis B & S coeuntibus, fit TC ad ST ut AC ad AO.

Prop. XXXIV. Theor. X.

Si figura BED Parabola est, dico quod corporis cadentis velocitas in loco quovis C æqualis est velocitati qua corpus centro B dimidio intervalli sui BC circumum
uniformiter describere potest.

Nam corporis Parabolam R-
PB circa Centrum S describen-
tis velocitas in loco quovis S
(per Corol. 7 Theor. VIII)
æqualis est velocitati corporis di-
midio intervalli SP circumum cir-
ca idem S uniformiter describen-
tis. Minuatur Parabolæ latitu-
do CP in infinitum eo, ut arcus
Parabolicus CP cum recta CB,
centrum S cum vertice B, & in-
tervallum SP cum intervallo CP
coincidat, & constabit Propositio.
Q. E. D. *Fig. 1. Tab. 1. A. 1.*

Prop. XXXV. Theor. XI

Isdem positus, dico quod area figure DES, radio indefinito SD de-
scripta, æqualis sit area quam corpus, radio dimidium lateris recti
figure DES egente, circa centrum S uniformiter gyando, eo-
dem tempore describere potest.

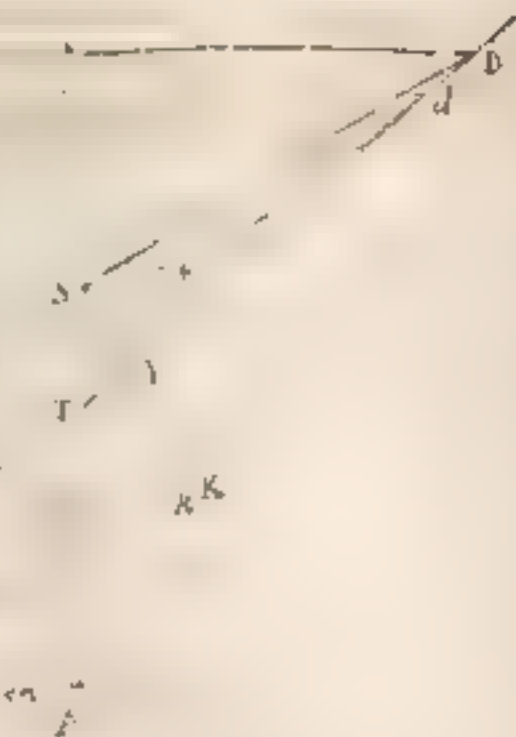
Nam concipe corpus C quam minima temporis particula lineo-
lam Ce cadendo describere, & interea corpus aliud K, uniformi-
ter in circulo OKK, circa centrum S gyando, arcum KK descri-
bere

bere. Erigantur perpendiculara CD , & occurrentia figura DES in D , d . Jungantur SD , SK , Sk & ducatur Dd axi AS occurrens in T , & ad eam demittatur perpendicularum ST .

Cas. 1. Jam si figura DES Circulus est vel Hyperbola, bisectetur ejus transversa diameter AS in O , & erit SO dimidium I uterius recti. Et quoniam est TC ad ID ut Ce ad Dd , & TD ad TS ut CD ad ST , erit ex aquo TC ad TS ut $CD \times Ce$ ad $ST \times Dd$. Sed per Corol. Prop. 22 est TC ad ST ut AC ad AO , puta si in costu punctorum D , & capantur linearum rationes ultimae. TC & AC est ad AO , id est ad Sh , ut $CD \times Ce$ ad $ST \times Dd$. Porro corporis descripti densitas velocitas in C est ad velocitatem corporis ei eundem intervallo SC circa centrum S describentis in dimidia ratione AC ad AO vel Sh (per Theor. IX). Et hanc velocitatem ad velocitatem corporis describentis circumulum OKk in dimidia ratione Sh ad SC per Cor. 6 Theor. IV. & ex aquo velocitas prima ad ultimam, hoc est area Ce ad arcum Kk in dimidiata ratione AC ad SC , id est in ratione AC ad CD . Quare est $CD \times Ce$ aequalis $AC \times Kk$, & propterea AC ad SK ut $AC \times Kk$ ad $ST \times Dd$ id est, $Sh \times Kk$ aequale $ST \times Dd$, & $SK \times Kk$ aequale $ST \times Dd$, id est area hSk aequalis aree SDd . Singulis igitur temporibus particulis generantur arearum duarum particulae hSk & SDd quae, si magnitudo earum minuatur & numerus augeatur in eundem modum, rationem obtinent aequalitatis, & propterea (per Coroll. prima Lemmatis IV) areae totae simul generatae sunt semper aequales. Q. E. D.

Cas. 2. Quod si figura DES Parabola sit, invenietur ut supra $CD \times Ce$ esse ad $ST \times Dd$ ut TC ad ST , hoc est ut 2 ad 1, adeoque $CD \times Ce$ aequalem esse $ST \times Dd$ sed corporis cadentis

tis velocitas in C æqualis est velocitati qua circulus intervallo SC uniformiter describi possit. (per Theor. X.) Et hæc velocitas ad velocitatem qua circulus radio SK describi possit, hoc est, lineola Cc ad arcum Kk est in dimidiata ratione SK ad Sc , id est, in ratione SK ad CD , per Corol. 6 Theorem. IV. Quare est $SK \times Kk$ æquale $CD \times c$, adeoque, æquale $ST \times Dd$, hoc est, area KS æqualis Areæ SDd , ut supra. *Quod erat demonstrandum.*



Prop. XXXVI. Prob. XXV.

Corporis de loco dato A cadentis determinare tempora descensus.

Super diametro AS (distantia corporis a centro sub initio) describe semicirculum ADS , ut & huic æqualem semicirculum OKH circa centrum S . De corporis loco quovis C erige ordinatim applicatam CD . Junge SD , & areæ ASD æqualem consue sectionem OSH . Patet per Theor. XI, quod corpus cadendo describet spatium AC eodem tempore quo corpus aliud uniformiter circa centrum S gylando, describere potest arcum OK . *Quod erat faciendum.*

Prop. XXXVII. Prob. XXVI.

Corporis de loco dato sursum vel deorsum projecti definire tempora ascensus vel descensus.

Ex-

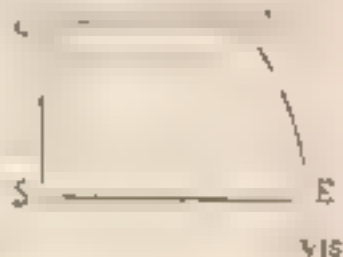
Exeat corpus de loco dato G secundum lineam ASG cum velocitate quacunque. In duplicata ratione huius velocitatis ad uniformem in circulo velocitatem, qua corpus ad intervallum datam SG circa centrum S revolvitur possit, cape C ad AS . Si ratio illa est numeri binarii ad unitatem, punctum A cadet ad infinitam distantiam, quo in casu Parabola vertice S , axe SC , lateri quovis recto describenda est. Patet hoc per Theorema X. Si ratio illa minor vel maior est quam 2 ad 1, priore casu Circulus, posteriore Hyperbola rectangula super diametro SA describi debet. Patet per Theorema IX. Tum centro S , intervallo equante dimiduum lateris recti, describatur circulus HHK , & ad corporis ascendens vel descendens loca duo quavis G, C , erigantur perpendiculara GI, CI occurrentia Conicæ Sectioni vel circulo in I at D . Dein iunctis SI, SD , fiant segmentis $SEIS$, $SEDS$ sectores HSE , HSE æquales, & per Theorema XI. corpus G describet spatium GC eodem tempore quo corpus H describere possit arcum HK . Q. E. D.



Prop. XXXVIII. Theor. XII.

P. sita quod vis centripeta proportionalis sit altitudini seu distantiæ locorum a centro, dico quod cadentium tempora, velocitates & spatia decripta sunt arcibus arcuumque, sinibus versis & sinibus rectis respective proportionales.

Cadat corpus de loco quovis A secundum rectum AS , & centro virium S , intervallo AS , describatur circuli quadrans AE , sitque CD huius rectus arcus cum-



R

VIS

ubi corpus versabatur in D ; & si ea sit vis centripeta, ut area $ABGE$ latus quadratum sit ut descendens velocitas, erit area ipsa in duplicata ratione velocitatis, id est, si pro velocitatibus in D & E scribantur V & $V + I$, erit area $ABFD$ ut V^2 , & area $ABGE$ ut $V^2 + 2VI + I^2$, & divisim area $DFGE$ ut $2I + I^2$, adeoque, $\frac{DFGE}{DE}$ ut $\frac{2I + I^2}{DE}$, id est, si primæ quantitatum nas-

centiam rationes sumantur, longitudo DF ut quantitas $\frac{2I + I^2}{DE}$,

adeoque, etiam ut quantitatis hujus dimidium $\frac{I + I^2}{DE}$. Est autem

tempus quo corpus cadendo describit lineolam DE , ut lineola illa directe & velocitas V inverse, estq; vis ut velocitatis incrementum I directe & tempus inverse, adeoque, si primæ nascentiam rationes sumantur, ut $\frac{I + I^2}{DE}$, hoc est, ut longitudo DF . Ergo vis

ipsi DF proportionalis facit corpus ea cum velocitate descendere quæ sit ut area $ABGE$ latus quadratum $Q. E. D.$

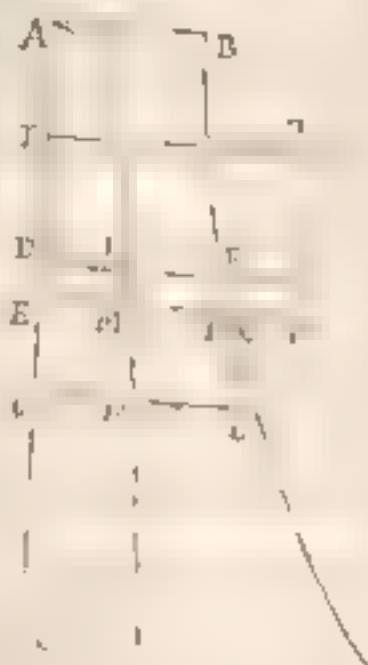
Porro cum tempus, quo qualibet longitudinis data lineola DE describatur, sit ut velocitas, adeoque, ut area $ABFD$ latus quadratum inverse, sitq; DL , atq; adeo area nascentis $DLME$, ut idem latus quadratum inverse. erit tempus ut area $DLME$, & summa omnium temporum ut summa omnium arearum, hoc est (per Corol. Lem. IV) tempus totum quo linea AE describitur ut area tota $AME. Q. E. D.$

Corol. 1. Si P sit locus de quo corpus cadere debet, ut, urgente aliqua uniformi in centripeta nota (qualis vulgo supponitur gravitas) velocitatem acquirat in loco D æqualem velocitati quam corpus aliud vi quacunque cadens acquisivit eodem loco D , & in perpendiculari DE capiat DR , quæ sit ad DF ut vis illa uniformis ad vim alteram in loco D , & compleatur rectangulum $PDRQ$, ei p. æqualis abscindatur area $ABFD$, erit A locus de quo corpus ætatem cecidit. • Namq; completo rectangulo

$EDRS$, cum sit area $ABFD$ ad aream $DFGE$ ut VV ad $2V \times I$, adeoque ut V ad I , id est, ut semel velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis vi inaequali cadentis, & similiter area $PQRD$ ad aream $DRSE$ ut semel velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis uniformi vi cadentis, suntq. incrementa I (ob aequalitatem temporum nascentium) ut vires generatrices, id est ut ordinatum applicatur PI DR , adeoque ut areae nascentes $DFGL$, $DRSE$, erunt (ex aequo) area totae $ABFD$, $PQRD$ ad invicem ut semel velocitatum, & propterea (ob aequalitatem velocitatum) aequantur.

Corol. 2. Unde si corpus quolibet de loco quocumq. D data cum velocitate vel sursum vel deorsum propiciatur, & detur lex vis centripetae, invenitur velocitas eius in alio quoq. loco E , cogitando E de A an I , & E de A de velocitatem illam ad velocitatem in loco D ut est latus quadratum rectanguli $PQRD$ area curvilinea $DFge$ vel aucti, si locus E est loco D inferior, vel diminuti, si E est superior est ad latus quadratum rectanguli scilicet $PQRD$, id est ut $\sqrt{PQRD + vel^2 DFge}$ ad \sqrt{PQRD} .

Corol. 3. Tempus quo per motum recte erigendo ordinatam em recte proportionalem latus quadratum ex $PQRD + vel^2 DFge$, & cogitando tempus quo corpus descripsit lineam De ad tempus quo corpus alteram vi uniformi ecessit a P & cadendo per velocitatem ad D , ut area curvilinea DLm ad rectangulum $2PD \times PL$. Namq. tempus quo corpus vi uniformi descendens descripsit lineam PD est ad tempus quo corpus idem descripsit lineam PL in immediata ratione PD ad PL , id est (lucola DE



junctam nascente) in ratione PD ad $PD + DE$ seu $2 PD$ ad $2 PD + DE$, & diviſim, ad tempus quo corpus idem deſcripſit lineolam DL ut $2 PD$ ad DL , adeoq, ut rectangulam $2 PE \times DL$ ad arcam $DLME$, eſtq, tempus quo corpus utrumq, deſcripſit lineolam DE ad tempus quo corpus alterum inæquabili motu deſcripſit lineam De ut area $DLME$ ad arcam $DLme$, & ex a quo tempus primum ad tempus ultimum ut rectangulam $2 PD \times DL$ ad arcam $DLme$.

S E C T. VIII.

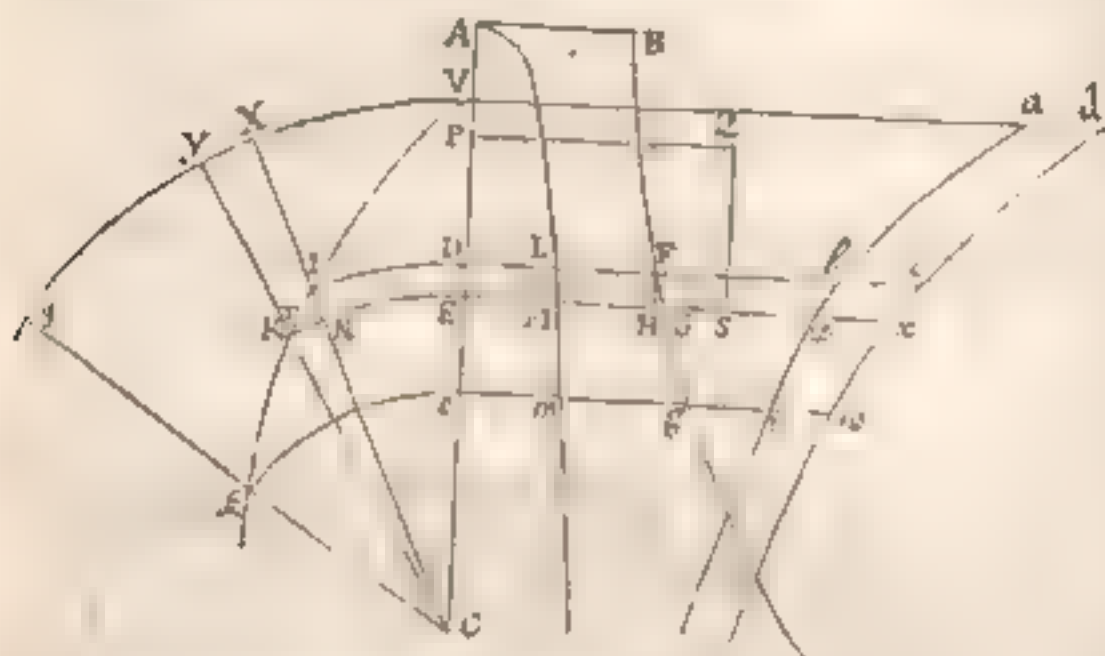
De Inventionem Orbium in quibus corpora quilibet quibuscumq, centripetis agitata revolvantur.

Prop. XL. Theor. XIII.

Si corpus, cogente & quacumq, centripeta, moveatur utcumq, & corpus aliud rectius certat ad aſcendat, ſunt eorum velocitates in aliquo æqualium altitudinum capite æquales, velocitates eorum in omnibus altitudinibus erunt æquales.

Descendat corpus aliquod ab A per D , E , ad centrum C , & moveatur corpus aliud ad idem loca curva IHK . Centro C intervallis quibuscumq, deſcribat ut circuli concentrici DI , LH rectæ AC in D & E , curvæq, IHK in I & H occurrentes. Jungatur IL occurret ipſe IL in N & in Ih deſcribitur perpendicularis NI , atq, circuli concentrici circuli centrate vallium DL vel IN quantum minimum, & habeant corpora in D & I velocitates æquales. Quoniam distantie CD , CI æquales, erunt vires centripetæ in D & I æquales. Exponantur hæ vires per æquales lineolas DE , IN , & distantia IN , per LE & CI vel 2 , resolvatur in duas NI & IL , ut NI , æquale hinc estam hinc est NI .

NT corporis cursus *ITK* perpendiculararem, nil mutabit velocitatem corporis in cursu illo, sed retrahet solummodo corpus a cursu rectilineo, facietq; ipsum de Orbis tangente perpetuo deflectere, inq; via curvilinea *ITK* progredi. In hoc effectu producendo vis illa tota consumetur. vis autem altera *IT*, secundum corporis cursum agendo, tota accelerabit illud, ac dato tempore quam minime accelerationem generabit sibi ipsi proportionalem. Proinde corporum in *D* & *I* accelerationes æqualibus temporibus fac-



et (si sumantur linearum nascentium *DE*, *IN*, *IK*, *IT*, *NT* rationes primæ) sunt ut lineæ *DE*, *IT*: temporibus autem inæqualibus ut lineæ illæ & tempora conjunctim. Tempora ob æqualitatem velocitatum sunt ut viæ descriptæ *DE* & *IK*, adeoq; accelerationes, in cursu corporum per lineas *DE* & *IK*, sunt ut *DE* & *IT*, *DE* & *IK* conjunctim, id est ut *DE* quad. & *IT* x *IK* rectangulum. Sed rectangulum *IT* x *IK* æquale est *IN* quadrato. hoc est, æquale *DE* quadrato & propterea accelerationes in transitu corporum a *D* & *I* ad *E* & *K* æquales generantur. Æquales igitur sunt corporum velocitates in *E* & *K* & eodem ar-

gumento semper reperientur æquales in subsequentiis æqualibus distantis. Q. E. D. Sed & eodem argumento corpora æquavelocia & æqualiter a centro distantia, in ascensu ad æquales distantias æqualiter retardabuntur. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si corpus vel sumipendulum oscilletur, vel impedimento quovis politissimo & perfecte lubrico cogatur in linea curva moveri, & corpus aliud recta ascendat vel descendat, sintq. velocitates eorum in eadem quacunq. altitudine æquales: erunt velocitates eorum in aliis quibuscunq. æqualibus altitudinibus æquales. Namq. impedimento val. absolute lubrici idem præstatur quod vi transversa *NT*. Corpus eo non retardatur, non acceleratur, sed tantum cogitur de cursu rectilineo ducere.

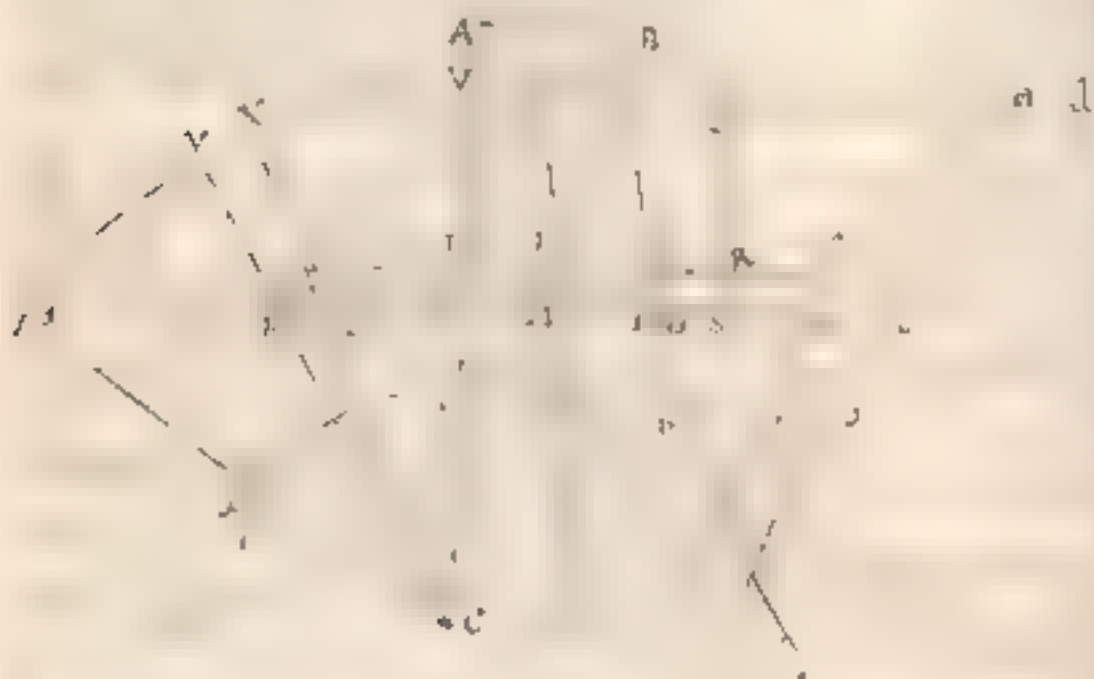
Corol. 2. Hinc etiam si quantitas *P* sit maxima a centro distantia, ad quam corpus vel oscillans vel in Trajectoria quacunq. revolvens, deq. quovis trajectorie puncto, ea quam ibi habet velocitate sursum projectum ascendere possit, sitq. quantitas *A* distantia corporis a centro in alio quovis Orbi puncto, & vis centripeta semper sit ut ipsius *A* dignitas qualibet A^n ~ n seu Index $n - 1$ est numerus quilibet n unitate diminutus, velocitas corporis in omni altitudine *A* erit ut $\sqrt{nP^n - nA^n}$, atq. adeo datur. Namq. velocitas ascendens ac descendens per Prop. XXXIX. est in hac ipsa ratione

Prop. XLI. Prob. XXVIII.

*Posita cujuscunq. generis vi centripeta & concessis figurarum circuli-
nearum quadraturis, requiruntur tum Trajectorie in quibus corpo-
ra movebuntur, tum tempora motuum in Trajectoriis inventis*

Tendat vis quælibet ad centrum *C* & invenienda sit Trajectoria *VIT* & *k*. Detur circulus *PXI* centro *C* intervallo quovis *CP* descriptus, centroq. eodem describantur alii quavis circuli *ID*,
K E

$A E$ trajectoriam secantes in I & K rectamq; CV in D & E . Age rursus rectam $CNIX$ secantem circulos $h E$, VT in N & X , tam rectam $Ch I$ occurrentem circulo IXI in I . Sint autem puncta I & h sibi invicem vicinissima, & pergat corpus ab I per I , I & h ad k , sitq; A altitudo illa de qua corpus aliud cadere debet ut in loco D velocitatem acquirat aequalem velocitati corporis prioris in I , & scilicet quae in Propositione XXXIX, quoniam lineoli Ik , dato tempore quam minimo descripta, est ut velocitas atq; adeo ut latus quadratum areae $ABFD$, & triangulum $IC h$



tempori proportionale datur, adeoque KN est reciproce ut altitudo IC , id est, si detur quantitas aliqua Q , & altitudo IC nominetur A , ut $\frac{Q}{A}$, quam nominemus Z . Ponamus etiam esse magnitudinem ipsam Q ut sit $\propto ABFD$ in aliquo casu ad Z ut est Ik ad hN , & erit semper $\propto ABFD$ ad Z ut Ik ad hN , & $ABFD$ ad ZZ ut Ik quad. ad hN quad. & dividim $ABFD - ZZ$ ad ZZ ut IN quad. ad hN quad. adeoque $\propto ABFD - ZZ$ ad Z ut IN ad hN , & propterea $A \times KN$ e-
quale

quale $\frac{Q \times IN}{\sqrt{ABFD - ZZ}}$.

Uade cum $TX \times XC$ sit ad $A \times hN$ in duplicata ratione IC ad KC , erit rectang. $TX \times XC$ quale

$\frac{Q \times IN \times EX \text{ quad}}{AA \vee ABFD - ZZ}$ Igitur si in perpendicularo DF capiantur

semper Db , Dc ipsi $\frac{Q}{\sqrt{ABFD - ZZ}}$ & $\frac{Q \times CX \text{ quad}}{AA \vee ABFD - ZZ}$

æquales respectivæ, & describantur curvæ lineæ ab , cd quas puncta b , c perpetuo tangunt, deq. puncto V ad lineam AC erigatur perpendicularum Vad abiciens areas curvilineas $VDb a$, $VDdc$, & erigantur etiam ordinatæ Ez , Ex : quoniam rectangulum $Db \times IN$ seu $DbzE$ æquale est dimidio rectanguli $A \times hN$, seu triangulo ICK , & rectangulum $Dc \times IN$ seu $Dc \times E$ æquale est dimidio rectanguli TX in CX , seu triangulo XCT , hoc est, quoniam arearum $VDb a$, VIC æquales semper sunt nascentes particule $DbzE$, ICK , & arearum $VDdc$, VCX æquales semper sunt nascentes particule $DcEx$, XCT , erit area genita $VDb a$ æqualis areæ genitæ VIC , adeoq. temporis proportionalis, & area genita $VDdc$ æqualis Sectori genito VCX . Dato igitur tempore quovis ex quo corpus discessit de loco V , dabitur area ipsi proportionalis $VDb a$, & inde dabitur corporis altitudo CD vel CI , & area $VDdc$, eiq. æqualis Sector VCX una cum ejus angulo VCI . Datis autem angulo VCI & altitudine CI datur locus I , in quo corpus completo illo tempore reperietur. Q. E. I.

Corol. 1. Hinc maximæ minimæq. corporum altitudines, id est Apſides Trajectoriarum expedite inveniri possunt. Incidunt enim Apſides in puncta illa in quibus recta IC per centrum ducta incidit perpendiculariter in Trajectoriam VIK id quod sit ubi rectæ IK & NK æquantur, adeoq. ubi area $ABFD$ æqualis est ZZ .

Corol. 2. Sed & angulus KIN , in quo Trajectoria alibi fecat lineam IC , ex data corporis altitudine IC expedite invenitur.

Propositione præcedente, per Curvæ cuiusdam quadraturam, cuius inventionem ut satis facilem brevitatis gratia omittam facio.

Prop. XLII. Prob. XXIX.

Data lege vis centripetæ, & primum motus corporis de loco dato data cum velocitate secundum datam rectam egressi

Stantibus quæ in tribus Propositionibus præcedentibus exeat corpus de loco I secundum lineolam II , ea cum velocitate quam corpus aliud, vi aliqua uniforme centripeta, de loco P cadendo acquirere posset in D sitq. hæc vis uniformis ad viam qua corpus primum urgetur in I ut DR ad DE . Pergat autem corpus versus k , centroq. C & intervallo Ck describatur circulus ke occurrens rectæ PD in e , & erigantur curvarum $ALMm$, $BFGg$ ab z & d ex w ordinatim applicatæ em , eg , ew , em . Ex dato rectangulo $PD R Q$, dataq. lege vis centripetæ qua corpus primum urgetur, dantur curvæ lineæ $BFGg$, $ALMm$, per constructionem Problematis XXVII. & eius Corol. 1. Deinde ex dato angulo $CH I$ datur proportio nascentium IK , KN , & inde, per constructionem Prob. XXVIII, datur quantitas Q , una cum curvis lineis $abzw$, $dexw$ adeoque completo tempore quovis Pbe , datur tum corporis altitudo Ce vel ek , tum area $De we$, eq. æqualis Sectori XCy , angulūq. XCy & locus k in quo corpus tunc versabitur. Q. E. I.

Supponimus autem in his Propositionibus vim centripetam in rectam quidem a centro variari secundum legem quamcunq. quam quis imaginari potest, in æqualibus autem a centro distantis esse undiq. eandem. Atq. hætenus corporum in Orbibus immobilibus consideravimus. Superest ut de motu eorum in Orbibus qui circa centrum virum revolvuntur adiciamus pauca.

nea CV , atq; figura $\psi C p$ figurae VCP aequalis, & corpus in p semper existens movebitur in perimetro figurae revolventis $\psi C p$, eodemq; tempore describet arcum ejus ψp quo corpus aliud P arcum ipsi similem & aequalem VP in figura quiescente VPK describere potest. Quzratur igitur, per Corollarium Propositionis VI, vis centripeta qua corpus revolvī possit in curva illa linea quam punctum p describit in plano immobili, & solvetur Problema. Q. E. F.

Prop. XLIV. Theor. XIV.

Differentia virium, quibus corpus in Orbe quiescente, & corpus aliud in eod. m Orbe revolvente aequaliter moveri possunt, est in triplicata ratione communis altitudinis inverse.

Partibus orbi quiescentis VP , PK sunt similes & aequales orbis revolventis partes ψp , $p k$. A puncto k in rectam pC demitte perpendicularum $k r$, idemq; produc ad m , ut sit mr ad $k r$ ut angulus $V C p$ ad angulum $V C P$. Quoniam corporum altitudines PC & pC , AC & kC semper aequantur, manifestum est quod si corporum in locis P & p existentium distinguantur motus singuli (per Legem Corol. 2, in binos, (quorum hi vertue centram, sive secundum lineas PC , pC , alteri prioribus transversa secundum lineas ipsas PC , pC perpendicularares determinantur) motus verius centrum erant aequales, & motus transvertue corporis p erit ad motum transversum corporis P , ut motus angularis lineae pC ad motum angularem lineae PC , id est ut angulus $V C p$ ad angulum $V C P$. Igitur eod. m tempore quo corpus P motu suo utroq; pervenit ad punctum A , corpus p aequali in centrum motu aequaliter movebitur a P versus C , adeoq; completo illo tempore reperietur alicubi in linea $mk r$, quae per punctum k in lineam pC perpendicularis est, & motu transverso acquirer distantiam a linea pC , quae sit ad distantiam quam corpus alterum acquirit a linea PC , ut est hujus motus transvertus ad motum

est lineola nascentis mn , eiq. proportionalis vicinam differentia reciproce ut cubus altitudinis pC Q. E. D.

Corol. 1 Hinc differentia vicinam in locis P & p vel k & k est ad viam qua corpus motu circulari revolvitur posset ab r ad k , eodem tempore quo corpus P in orbe immobili describit arcum PA , ut $mk \times ms$ ad rk quadratam, hoc est si capiantur datae quantitates t , & in ea ratione ad invicem quam habet angulus VCP ad angulum VCP , ut $Gq. = Fq.$ ad $Fq.$ Et propterea, si centro C intervallo quovis CP vel Cp describatur sector circularis æqualis arcæ toti kPC , quam corpus P tempore quovis in orbe immobili revolvens radio ad centrum ducto descriptit, differentia vicinam, quibus corpus P in orbe immobili & corpus p in orbe mobili revolvitur, erit ad vim centripetam quæ corpus aliquod radio ad centrum ducto sectorem istum, eodem tempore quo descripta sit arcæ kPC , uniformiter describere posset, ut $Gq. = Fq.$ ad $Fq.$ Namq. sector ille & arcæ pCk sunt ad invicem ut tempora quibus describuntur.

Corol. 2 Si orbi PPk Ellipticæ sit umbilicum habens C & Ap-sidem semper in P , eiq. radiis & æqualis ponatur Ellipsis $2pk$, ita ut sit tempus pC æqualis PC , & arcus PCp sit ad angulum VCP in data ratione G ad F , pro altitudine autem PC vel pC describatur A , & p ad illius latere recto ponatur $2k$ erit vis qua corpus in Ellipsi mobili revolvitur posset, ut $\frac{t}{Aq.} + \frac{RCq. - RFq.}{Aenb.}$

& contra F ponatur et in vi qua corpus revolvitur in immota Ellipsi per quæ tatem $\frac{t}{Aq.}$, & vis in P erit $\frac{Fq.}{Cp. mod.}$ Vis autem qua corpus in circulo ad constantiam C eadem velocitate revolvitur posset quam corpus in Ellipsi revolvens habet in P , est ad vim quæ corpus p in Ellipsi revolvens tractat in Ap. de P , et semidiam latens recti Ellipticos ad circuli am. diametrum CV , adeoque valet $\frac{RFq.}{CVenb.}$ & vi quæ sit ad hanc ut G p. F p.

ad Fq , valet $\frac{RGq - RFq}{CV^3 \text{ cub.}}$: estq, hac vis (per huius Corol.

1.) differentia virium quibus corpus P in Ellipsi immota VPK , & corpus p in Ellipsi mobili vpk revolvantur. Unde cum (per hanc Prop) differentia illa in alia quavis altitudine A sit ad se-

ipsam in altitudine CV ut $\frac{1}{A^3 \text{ cub.}}$ ad $\frac{1}{CV^3 \text{ cub.}}$, eadem differentia

in omne altitudine A valebit $\frac{RGq - RFq}{A^3 \text{ cub.}}$. Igitur ad vim $\frac{Fq}{Aq}$

qua corpus revolvitur potest in Ellipsi immobili VPK , addatur excessus $\frac{RGq - RFq}{A^3 \text{ cub.}}$. & componetur vis tota $\frac{Fq}{Aq} + \frac{RGq - RFq}{A^3 \text{ cub.}}$

qua corpus in Ellipsi mobili vpk eodem temporibus revolvitur possit.

Corol. 3. Ad eundem modum colligetur quod, si orbis immobilis VPK sit plis sit centrum habens in vicinum centro C , eius, similis, aequalis & concentrica ponatur Ellipsis mobilis vpk , sitq, 2 R Ellipseos huius latus rectum, & 2 I latus transversum, atq, angulus $I \cup p$ semper sit ad angulum VCP ut G ad F , vires quibus corpora in Ellipsi immobili & mobili temporibus aequalibus revolvitur possunt, erunt ut $\frac{Iq}{I^3 \text{ cub.}}$ & $\frac{Fq}{I^3 \text{ cub.}} + \frac{RGq - RIq}{A^3 \text{ cub.}}$

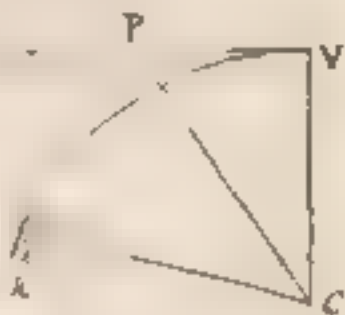
respective.

Corol. 4. Et universaliter, si corporis altitudo maxima CV nominetur T , & radius curvaturæ quam Orbis VPK habet in V , id est radius circuli aequaliter curvi, nominetur R , & vis centripeta qua corpus in Trajectoria quacunque immobili VPK revolvitur potest, in loco V dicatur $\frac{Fq}{Tq}$, atq, alius in locis P indefinite dicatur X , altitudine CP nominata A , & capiatur G ad F in data ratione anguli $I \cup p$ ad angulum VCP : erit vis centripeta qua corpus idem eodem motus in eadem Trajectoria vpk circulariter

riter mota temporibus ædem peragere potest, ut summa virium
 $X + \frac{VRGq. - VRFq.}{Acub.}$

Corol. 5. Dato igitur motu corporis in Orbe quocunq; immo-
 bili, augeri vel minui potest ejus motus angularis circa centrum
 virium in ratione data, & inde inventiri novi orbes immobiles in
 quibus corpora novis viribus centripetis ærentur.

Corol. 6. Igitur si ad rectam CV per motu datam erigatur per-
 pendiculum VP longitudini indeterminata, iungaturq; PC , & ipsi
 æqualis agatur Cp , constituens angulum VCP , qui sit ad angulum
 VCP in data ratione; vis qua corpus
 gyriari potest in Curva illa $Vp\dot{k}$ quam
 punctum p perpetuo tangit, erit reci-
 proce ut cubus altitudinis Cp . Nam
 corpus P , per vim inertie, nulla alia vi
 urgente, uniformiter progredi potest
 in recta VP . Addatur vis in centrum
 C , cubo altitudinis CP vel Cp reci-
 proce proportionalis, & (per iam de-
 monstrata) detorquebitur motus ille rectilineus in lineam curvam
 $Vp\dot{k}$ Est autem hæc Curva $Vp\dot{k}$ eadem cum Curva illa VpQ
 in *Corol. 3. Prop. XII* inventa, in qua ibi diximus corpora hujus-
 modi viribus attracta oblique ascendere.



Prop. XLV. Prob. XXXI.

Orbium qui sunt Circulis maxime sunt in re partituri motus Apsidum.

Problema solvitur Arithmetice faciendū ut orbis, quem corpus
 in Ellipsi mobili, ut in Propositionis superioris *Corol. 2. vel 3.*
 revolvens, describit in plano immobili, accedat ad formam orbis
 cujus Apsides requiruntur, & querendo Apsides orbis quem cor-
 pus illud in plano immobili describit. Orbes autem eandem ac-
 quirent formam, si vires centripetæ quibus describuntur, inter se

collatz, in æqualibus altitudinibus reddantur proportionales. Sit punctum V Apſis ſumma, & ſcribantur T pro altitudine maxima CV , A pro altitudine quavis alia CP vel Cp , & X pro altitudinum differentia $CV - CP$; & vis qua corpus in Ellipſi circa umbilicum ejus C (ut in Corollario 2.) revolvente movetur, quæq; in Corollario 2. erat ut $\frac{Fq.}{Aq.} + \frac{RCq. - RFq.}{Acub.}$ id eſt

ut $\frac{Fq. A + RCq. - RFq.}{Acub.}$, ſubſtituendo $T - X$ pro A , erit ut

$\frac{RCq. - RFq. + TFq. - Fq. X}{Acub.}$. Reducenda ſimiliter eſt vis alia

quævis centripeta ad fractionem cujus denominator ſit $Acub.$, & numeratores, facta homologorum terminorum collatione, ſtatuendi ſunt analogi. Res Exemplis patebit

Exempl. 1. Ponamus vim centripetam ætalem eſſe, adeoq; ut $\frac{Acub.}{Acub.}$, ſive (ſcribendo, $T - X$ pro A in Numeratore) ut

$\frac{Tcub. - 3Tq. X + 3TXq. - Xcub.}{Acub.}$; & collatis Numeratorum

terminis correspondentibus, nimirum datis cum datis & non datis cum non datis, fiet $RCq. - RFq. + TFq.$ ad $Tcub.$ ut $- Fq. X$ ad

$3Tq. X + 3TXq. - Xcub.$ ſive ut $- Fq.$ ad $- 3Tq. + 3TX$

$- Xq.$ Jam cum Orbis ponatur circulo quam maxime ſimilis, locat orbis cum circulo, & ob tactas R, I æquales, atq; X in infinitum diminutum, ratione ultime erunt $RCq.$ ad $Tcub.$ ut $- Fq.$

ad $- 3Tq.$ ſeu CG ad $Tq.$ ut $Fq.$ ad $3Tq.$ & viciffim C quadrat.

ad F quadrat ut T quadrat. ad $3T$ quadrat. id eſt, ut 1 ad 3, adeoq;

G ad F , hoc eſt angulus ICP ad angulum VCP , ut 1 ad $\sqrt{3}$.

Ergo cum corpus in Ellipſi mobili, ab Apſide ſumma ad Apſidem imam deſcendendo conſiciat angulum VCP (ut ita dicam) graduum 190, corpus aliud in Ellipſi mobili, atq; adeo in

orbe immobili de quo agimus, ab Abſide ſumma ad Apſidem imam deſcendendo conſiciat angulum VCP graduum $\frac{180}{\sqrt{3}}$; id

adeo

adeo ob similitudinem orbis hujus, quem corpus agente uniformi vi centripeta describit, & orbis illius quem corpus in Ellipsi revolvente gyros peragens describit in plano quiescente. Per superiorem terminorum collationem similes redduntur hi orbis, non universaliter, sed tunc cum ad formam circularem quam maxime appropinquant. Corpus igitur uniformi cum vi centripeta in orbe propinodum circulari revolvens, inter Apsidem summam & Apsidem unam conficiet semper angulum $\frac{180}{\sqrt{3}}$ graduum, seu

103 gr 55 m. ad centrum, perveniens ab Apside summa ad Apsidem unam, ubi semel conficit hunc angulum, & inde ad Apsidem summam rediens, ubi iterum conficit eundem angulum, & sic deinceps in infinitum.

Exempl. 2. Ponamus vim centripetam esse ut altitudinis A dignitas quaelibet A^{n-3} seu $\frac{A^n}{A}$ ubi $n-3$ & n significant dignitatum indices quoscunque, integros vel fractos, rationales vel irracionales, affirmativos vel negativos. Numerator ille A^n seu $1-X^n$ in seriem indeterminatam per Methodum nostram Serierum convergentiam reducta, evadit $T^n - n X T^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} X^2 T^{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{6} X^3 T^{n-3} + \dots$ &c. Et collatis huius terminis cum terminis Numeratoris alterius $RCq. - RFq. + IFq. - Fq. X$, fit $RCq. - RFq. + IFq.$ ad T^n ut $-Fq.$ ad $-n T^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} X T^{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{6} X^2 T^{n-3} + \dots$ &c. Et sumendo rationes ultimas ubi orbis ad formam circularem accedant, fit $RCq.$ ad T^n ut $-Fq.$ ad $-n T^{n-1}$, seu $Gq.$ ad T^{n-1} ut $Fq.$ ad $n T^{n-1}$, & vicissim $Gq.$ ad $Fq.$ ut T^{n-1} ad $n T^{n-1}$ id est ut 1 ad n , adeoque G ad F , id est angulus VCP ad angulum VCP , ut 1 ad \sqrt{n} . Quare cum angulus VCP , in descensu cor-

portus ab Apfide fumma ad Apfidem imam in Ellipfi confectus,
 fit graduum 180, conficietur angulus $V\ell p$, in defcenfu corporis
 ab Apfide fumma ad Apfidem imam in Orbe propemodum cir-
 culari, quem corpus quodvis vi centripeta dignitati $A^n - 3$ pro-
 portionali defcribit, æqualis angulo graduum $\frac{180}{n}$, & hoc angulo
 repetito corpus redibit ab Apfide ima ad apfidem fummam, &
 fic deinceps in infinitum. Ut fi vis centripeta fit ut diftantia cor-
 poris a centro id est ut A feu $\frac{A^1}{A^1}$, erit n æqualis 4 & $\sqrt{4}$ æqualis
 2, adeoq; angulus inter Apfidem fummam & Apfidem imam æ-
 qualis $\frac{180}{2}$ gr. feu 90gr. Completa igitur quarta parte revoluti-
 onis unius corpus perveniet ad Apfidem imam, & completa alia
 quarta parte ad Apfidem fummam, & fic deinceps per vias in
 infinitum. Id quod etiam ex Propositione X. manifestum est.
 Nam corpus urgente hac vi centripeta revolvetur in Ellipfi im-
 mobili, cujus centrum est in centro vuturi. Quod si vis centripeta
 fit reciproce ut diftantia, id est ut $\frac{1}{A}$ feu $\frac{A^1}{A^1}$, erit $n = 2$, a-
 deoq; inter Apfidem fummam & imam angulus erit graduum $\frac{180}{2}$,
 feu 127 gr. 17 min. & propterea corpus tali vi revolvens, perpe-
 tua anguli huius repetitione, vicibus alteris ab Apfide fumma ad
 imam & ab ima ad fummam perveniet in æternum. Porro si vis
 centripeta fit reciproce ut Latu quadrato-quadratum indecimæ
 dignitatis Altrudinis, id est reciproce ut A^{-10} , adeoq; directe ut
 $\frac{1}{A^{10}}$ feu ut $\frac{A^1}{A^{10}}$ erit n æqualis 1, & $\frac{180}{1}$ gr. æquali 360 gr. & prop-
 terea corpus de Apfide fumma difcedens & fubinde perpetuo de-
 fcendens, perveniet ad Apfidem imam ubi complevit revolutio-
 nem integram, deinde perpetuo aliam complendo aliam revolutio-
 nem integram, redibit ad Apfidem fummam & fic per vias in æter-
 num.

Exempl. 3. Assumentes m & n pro quibuscvis indicibus dignitatum
 Altitudinis, & b, c pro numeris quibuscvis datis, ponamus vim cen-
 tripetam esse ut $\frac{b A^m + c A^n}{A \text{ cub.}}$, id est ut $\frac{b \text{ in } I - X^m + c \text{ in } I - X^n}{A \text{ cub.}}$

seu (per eandem Methodum nostram Serierum convergentium) ut
 $\frac{b T^m - m b X T^{m-1} + \frac{m m - 1}{2} b X^2 T^{m-2} + c T^n - n c X T^{n-1} + \frac{n n - 1}{2} c X^2 T^{n-2} \&c.}{A \text{ Cub.}}$

& collatis numeratorum terminis, hęc $R G q. - R F q. + T F q.$ ad

$b T^m + c T^n$, ut $- F q.$ ad $- m b T^{m-1} - n c T^{n-1} + \frac{m m - 1}{2} b$

$X T^{m-2} + \frac{n n - 1}{2} X T^{n-2} \&c.$ Et sumendo rationes ultimas
 quę prodeunt ubi orbes ad formam circulem accedunt, sit $G q.$

ad $b T^{m-1} + c T^{n-1}$, ut $F q.$ ad $m b T^{m-1} + n c T^{n-1}$, &

vicissim $G q.$ ad $F q.$ ut $b T^{m-1} + c T^{n-1}$ ad $m b T^{m-1} + n c T^{n-1}$.

Quę proportio, exponendo altitudinem maximam $C V$ seu I Arith-
 metice per unitatem, sit $G q.$ ad $F q.$ ut $b + c$ ad $m b + n c$, adeoq, ut

1 ad $\frac{m b + n c}{b + c}$. Unde est G ad F , id est angulus $V C p$ ad angulum

$V C P$, ut 1 ad $\sqrt[m]{\frac{m b + n c}{b + c}}$. Et propterea cum angulus $V C P$ inter

Apsidem summam & Apsidem imam in Ellipsi immobili sit 180 gr.
 erit angulus $b c p$ inter eandem Apsides, in Orbe quem corpus vi

centripeta quantitati $\frac{b A^m + c A^n}{A \text{ cub.}}$ proportionali describit, æqua-

lis angulo graduum $180 \sqrt[m]{\frac{b + c}{m b + n c}}$. Et eodem argumento si vis

centripeta sit ut $\frac{b A^m - c A^n}{A \text{ cub.}}$, angulus inter Apsides invenietur

$180 \sqrt[m]{\frac{b - c}{m b - n c}}$ graduum. Nec secus resolvetur Problema in ca-

libus

sibus difficilioribus. Quantitas cui vis centripeta proportionalis est, resolvi semper debet in series convergentes denominatorem habentes *A cub.* Dein pars data Numeratoris huius $R G q. - R F q + T F q. - F q. X$ ad partem non datam in eadem ratione ponenda sunt. Et quantitates superfluas delendo, scribendoq, unitatem pro *T*, obtinebitur proportio *G* ad *F*.

Corol. 1. Hinc si vis centripeta sit ut aliqua altitudinis dignitas, inveniri potest dignitas illa ex motu Apſidi *m.* & contra. Nimirum si motus totus angularis, quo corpus redit ad Apſidem eandem, sit ad motum angularem revolutionis unius, seu gradum 360, ut numerus aliquis *m* ad numerum alium *n*, & altitudo no-

manetur *A*: erit vis ut altitudinis dignitas illa $A^{\frac{n}{m}} - 3$, cuius Index est $\frac{n}{m} - 3$. Id quod per Exempla secunda manifestum est.

Unde liquet vim illam in maiore quam triplicata altitudinis ratione decreſcere non posse. Corpus tali vi revolvens deq, Apſide discedens, si experit descendere, nunquam perveniet ad Apſidem minam seu altitudinem minimam, sed descendet usq, ad centrum, describens curvam illam lineam de qua egimus in Corol. 3 Prop. XLI. Sin experit illud de Apſide discedens vel minimam ascendere, ascendet in infinitum, neq, unquam perveniet ad Apſidem summam. Describet enim curvam illam lineam de qua actum est in eodem Corol. & in Corol. 6 Prop. XLIV. Sic & ubi vis in recessu a centro decreſcit in maiori quam triplicata ratione altitudinis, corpus de Apſide discedens peritade ut experit descendere vel ascendere, vel descendet ad centrum usq, vel ascendet in infinitum. At si vis in recessu a centro vel decreſcat in minori quam triplicata ratione altitudinis, vel creſcat in altitudinis ratione quacunq, Corpus nunquam descendet ad centrum usq, sed ad Apſidem minam aliquando perveniet: & contra, si corpus de Apſide ad Apſidem alteram vicibus descendens & ascendens nunquam appropinquat ad centrum, Vis in recessu a centro aut augebitur, aut in-

minore quam triplicata altitudinis ratione decreſcet: & quo citius corpus de Apſide ad Apſidem redeat, eo longius ratio virium recedet a ratione illa triplicata. Ut ſi corpus revolutionibus 8 vel 4 vel 2 vel 1 de Apſide ſumma ad Apſidem ſumnam alternodeſcenſu & aſcenſu redeat, hoc eſt, ſi fuerit m ad n ut 8 vel 4 vel 2 vel 1 ad 1, adeoq, $\frac{n}{m} = 3$ valeat $2 - 3$ vel $4 - 3$ vel $1 - 3$ vel $1 - 3$, erit vis ut A^{2-3} vel A^{4-3} vel A^{1-3} vel A^{1-3} , id eſt reciproce ut $A^3 - 1$ vel $A^3 - 1$ vel $A^3 - 1$ vel $A^3 - 1$. Si corpus ſingulis revolutionibus redeat ad Apſidem eandem immoram, erit m ad n ut 1 ad 1, adeoq, $A^{\frac{n}{m}} = 3$ æqualis A^{-2} ſeu A^2 , & propterea decrementum virium in ratione duplicata altitudinis, ut in precedentibus demonſtratum eſt. Si corpus partibus revolutionis unius vel tribus quartis, vel duabus tertis, vel una tertia, vel una quarta, ad Apſidem eandem redeat, erit m ad n ut $\frac{1}{4}$ vel $\frac{1}{3}$ vel $\frac{1}{2}$ vel 1 ad 1, adeoq, $A^{\frac{n}{m}} = 3$ æqualis A^{1-3} vel A^{2-3} vel A^{3-3} vel A^{4-3} , & propterea Vis aut reciproce ut A^3 vel A^2 , aut directe ut A^6 vel A^{12} . Deniq, ſi Corpus pergendo ab Apſide ſumma ad Apſidem ſumnam conſecerit revolutionem integram & præterea gradus tres, adeoq, Apſis illa ſingulis corporis revolutionibus coaleſcent in Conſequentia gradus tres, erit m ad n ut 363 gr ad 360 gr adeoq, $A^{\frac{n}{m}} = 3$ erit æquale A^{1-3} & propterea Vis centripeta reciproce ut A^3 ſeu A^2 . Decreſcit igitur Vis centripeta in ratione paulo majore quam duplicata, ſed quæ visibus ſuis propius ad duplicatam quam ad triplicatam accedit.

Corol. 2. Hinc etiam ſi corpus, vi centripeta quæ ſit reciproce ut quadratum altitudinis, revolvatur in Ellipſi umbilicum habente in centro virium, & huic vi centripetæ addatur vel auteratur vis alia quævis extranea, cognosci poteſt (per Exampla

ter-

tertia) motus Apſidum qui ex vi illa extranea oritur: & contra. Ut ſi vis qua corpus revolvitur in Ellipſi ſit ut $\frac{1}{A}$, & vis extranea ablata ut cA , ad id q. vis reliqua ut $\frac{A-cA}{A}$ ſerit (in Exemplis tertius) A æqualis 1 & c æqualis 4, adeoq. angulus revolutionis inter Apſides æqualis angulo graduum $180 \sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$. Ponatur vim illam extraneam eſſe 357. viſibus nunciemus quam vis altera qua corpus revolvitur in Ellipſi, id eſt c eſſe 1, & $180 \sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$ evadet $180 \sqrt{\frac{1-1}{1-4}}$ ſeu 180, id eſt 180gr. 45m. 37ſ. Igitur corpus de Apſide ſumma diſcedens, mora angulari 180gr. 45m. 37ſ. perveniat ad Apſidem imam, & hoc motu duplicato ad Apſidem ſummam redibit. adeoq. Apſis ſumma ſingulis revolutionibus progreſſu conſiciet 1gr. 31m. 14ſ. Hactenus de motu corporum in orbibus quorum plani per centrum virium tranſeunt. Superſt eſt ut motus etiam determinemus in planis excentricis. Nam Scriptores qui motum gravium tractant, conſiderare ſolent aſcenſus & deſcenſus ponderum, tam obliquos in planis quibuscunq. datis, quam perpendiculares. & pari jure motus corporum viribus quibuscunq. centra petentium, & planis excentricis innocentium hic conſiderandus venit. Plana autem ſupponimus eſſe politiſſima & abſolute lubrica ne corpora retardent. Quoniam in his demonſtrationibus, vice planorum quibus corpora incumbunt qualiq. tangunt incumbendo, utiſſimus plana his parallela, in quibus centra corporum moventur & orbis movendo deſcribunt. Et eadem lege motus corporum in ſuperficiebus curvis peractos ſubinde determinamus.

SEC.

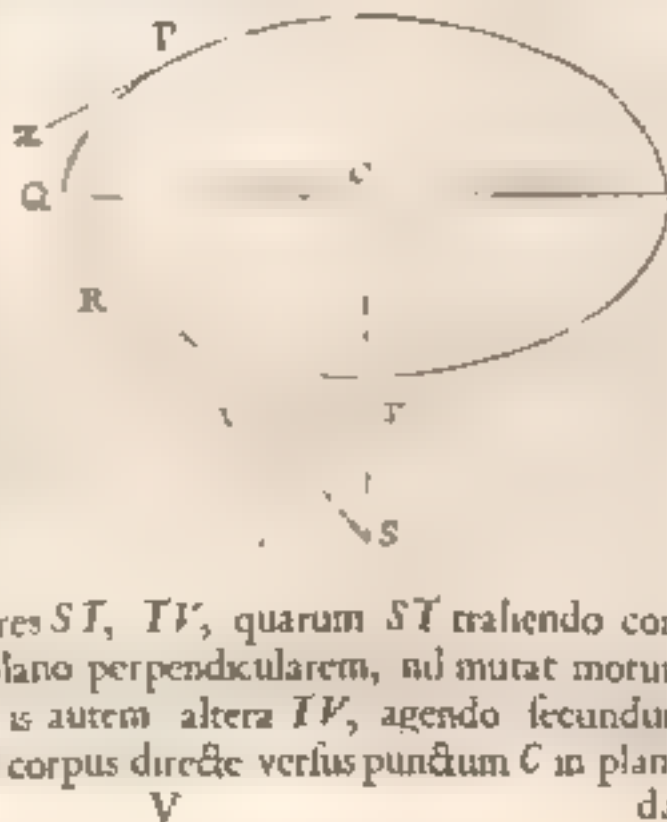
S E C T. X.

*De Motu Corporum in Superficiebus datis, deq, Funipendulorum
Motu reciproco.*

Prop. XLVI. Prob. XXXII.

*Posita cuiuscumq, generis vi centripeta, dataq, tum circum centro tum
plano quocumq, in quo corpus revolvitur, & concessis figurarum
curvilinearum quadraturis requiritur motus corporis de loco dato
data cum velocitate secundam Rectam in Plano illo datam egressi.*

Sit S centrum virium, SC distantia minima centri huius a pla-
no dato, P corpus de loco P secundum rectam PZ egrediens, Q
corpus idem in Trajec-
toria sua revolvens, &
 PQR Trajectoria illa
in plano dato descrip-
ta, quam invenire o-
portet. Jungantur CQ
 QS , & si in QS capia-
tur SV proportionalis
vi centripetæ qua cor-
pus trahitur versus cen-
trum S , & agatur VT
quæ sit parallela CQ
& occurrat SC in T :
Vis SV resolveretur (per
Legum Corol. 2.) in vires ST , TV , quarum ST trahendo cor-
pus secundum lineam plano perpendicularem, nil mutat motum
eius in hoc plano. Vis autem altera TV , agendo secundum
positionem plani, trahit corpus directe versus punctum C in plano
da-



quovis PQR circa punctum C , atq. in spatius liberis circa centrum S , adeoq. (per Corol. 2. Prop. X. & Corol. 2. Prop. XXXVIII.) temporibus semper æqualibus, vel describent Ellipses in plano illo circa centrum C , vel periodos movendi ultra citroq. in lineis rectis per centrum C in plano illo ductis, complebunt. Q. E. D.

Scholium.

His affines sunt ascensus ac descensus corporum in superficiebus curvis. Concipe lineas curvas in plano describi, dein circa axes quovis datos per centrum virum transeuntes revolvī, & ea revolutione superficies curvas describere, tum corpora ita moveri ut eorum centra in his superficiebus perpetuo repetantur. Si corpora illa oblique ascendendo & descendendo currant ultra citroq. peragentur eorum motus in planis per axem transeuntibus, atq. adeo in lineis curvis quarum revolutione curvæ illæ superficies genitæ sunt. Istis igitur in casibus sufficit motum in his lineis curvis considerare.

Prop. XLVIII. Theor. XVI.

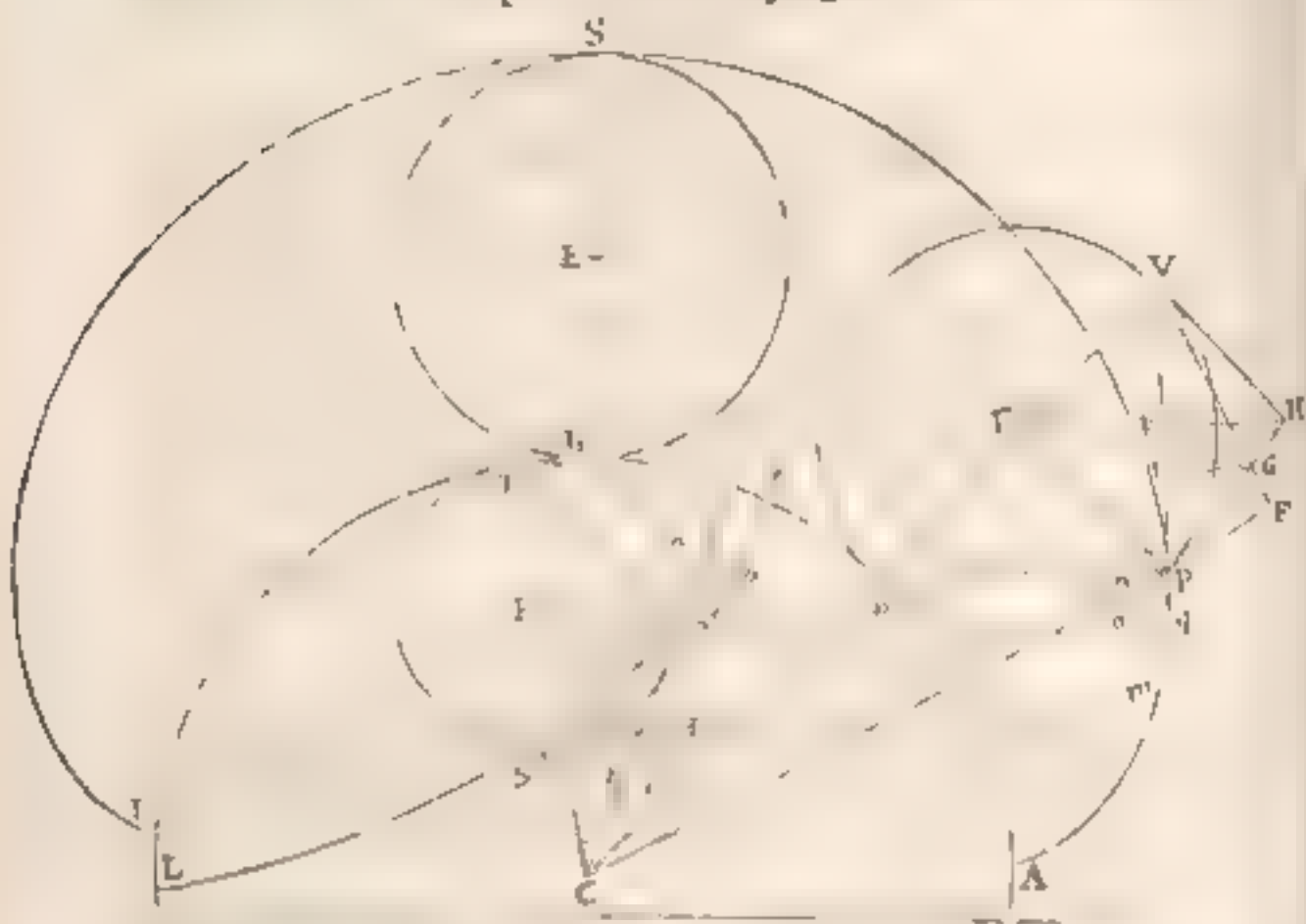
Si rota globo extrinsecus ad angulos rectos insistat, & move rotarum revolvendo progrediatur in circulo maximo, longitudo itineris curvilinearis, quod punctum quoddam in rotæ perimetro datum, ex quo globum tetigit, confectum, erit ad duplicatum sinum versum arcus dimidui qui globum ex eo tempore inter eundem tetigit, ut summa diametrorum globi & rotæ ad secundam partem globi.

Prop. XLIX. Theor. XVII.

Si rota globo concavo ad rectos angulos intrinsecus insistat & revolvendo progrediatur in circulo maximo, longitudo itineris curvilinearis

quod punctum quodvis in Rota Perimetro datum, ex quo globum tetigit, confect, erit ad duplicatum sinum versum arcus dimidius qui globum toto hoc tempore inter eundem tetigit, ut differentia diametrorum globi & rotæ ad semidiametrum globi.

Sit ABL globus, C centrum ejus, BPV rota ei insitens, E centrum rotæ, B punctum contactus, & P punctum datum in perimetro rotæ. Concipe hanc Rotam pergere in circulo maximo



ABL ab A per B versus L , & inter eundem ita revolvi ut arcus AB , PB sibi invicem semper æquantur, atq. punctum illud P in Perimetro rotæ datum interea describere viam curvilineam AP . Sit autem AP via tota curvilinea descripta ex quo Rota globum tetigit in A , & erit via hujus longitudo AP ad duplum sinum verum arcus $\frac{1}{2}PB$, ut $2CE$ ad CB . Nam recta CE (si
opus

opus est producta) occurrat Rotæ in I , junganturq. CP, BP, EP, VP , & in CP productam demittatur Normalis IF . Tangant PH, VH circulum in P & V concurrentes in H , secetq. PH ipsam IF in G , & ad I demittantur Normales GI, HK . Centro item C & intervallo quovis describatur circulus *nom* secans rectam CP in n , Rotæ perimetrum bp in o & vim curviliaceam AP in m , centroq. I & intervallo Io describatur circulus secans VP productam in q .

Quoniam Rota cundo semper revolvitur circa punctum contactus B , manifestum est quod recta BP perpendicularis est ad lineam illam curvam AP , quam Rotæ punctum P describit, atq. adeo quod recta VP tanget hanc curvam in puncto P . Circuli *nom* radius sensim auctus æquetur tandem distantia CP , & ob similitudinem figuræ evanescens $Pnomq$ & figuræ $PIGV$, ratio ultima lineolarum evanescens Pm, Pn, Po, Pq id est ratio incrementorum momentaneorum curvæ AP , rectæ CP & arcus circularis BP , ac decrementi rectæ VP , eadem erit quæ linearum PV, PI, IG, PI respectivæ. Cum autem VF ad CF & IH ad IF perpendiculares sunt, anguli HIG, ICE propterea æquales & angulus IHP , (ob angulos quadrilateri $HVLP$ ad V & P rectos, complet angulum VEP ad duos rectos, adeoq. angulus CEP æqualis est, iuncta erunt trianguia VHG, CEP , & inde fiet ut IP ad CE ita HG ad HV ita HP , & ita KI ad KP , & divisi ut CB ad CE ita PI ad PK , & duplicatis consequentibus ut CB ad $2CE$ ita PI ad PP . Est igitur decrementum lineæ VP , id est incrementum lineæ $BI - IP$, ad incrementum lineæ curvæ AP in data ratione CB ad $2CE$, & propterea (per Corol. Lem. IV) longitudines $BI - IP$ & AP incrementis illis genitæ sunt in eadem ratione. Sed existente hV radio, est IP coînus anguli IPB seu LEP , adeoq. $BI - IP$ sinus verus eîusdem anguli, & propterea in hac Rota cuius radius est hV , erit $BI - VP$ duplus sinus verus arcus BP . Ergo AP est ad duplum sinum verum arcus BP ut $2CE$ ad CB . (V. E. D.)

Lineam autem AP in Propositione priore Cycloidem extra Globum, alteram in posteriore Cycloidem intra Globum distinctionis gratia nominabimus

Corol. 1. Hinc si describatur Cyclois integra ASL & biseccetur ea in S , erit longitudo partis PS ad longitudinem VP (quæ duplus est sinus anguli VBP , existente LB radio) ut $2CE$ ad CB , atq; adeo in ratione data.

Corol. 2. Et longitudo semipetimetri Cycloidis AS æquabitur lineæ rectæ, quæ est ad Rotæ diametrum BF ut $2CL$ ad CB .

Corol. 3. Ideoq; longitudo illa est ut rectangulum BEC , si modo Globi detur semidiameter.

Prop. L. Prob. XXXIII.

Facere ut Corpus pendulum oscilletur in Cycloide data.

Intra Globum QVS centro C descriptum detur Cyclois QRS hinc ita in R & punctis suis extremis Q & S superficiem Globi hinc inde occurrente. Agatur CR hinc ita arcum QS in O , & producatue ea ad A , ut sit CA ad CO ut CO ad CR . Centro C intervallo CA describatur Globus exterior ABD , & int. a hunc globum Rota, cuius diameter sit AO , describantur due semicycloides AQ , AS , quæ globum internorem tangant in Q & S & globo exteriori occurrant in A . A puncto illo A , filo API long. arbitraria AR æquante, pendeat corpus T , & ita intra semicycloides AQ , AS oscilletur, ut quoties pendulum dirigitur a perpendiculari AR , tam parte sui superiore AP applicetur ad semicycloidem illam APQ , versus quam petatur motus & circum eam cum obstaculo dectatur, parteq; reliqua PT cui semicyclois nondum obstat, protendatur in lineam rectam, & pondus T oscilletur in Cycloide data QRS . Q. E. F.

Occurrat tunc illi PI cum Cycloidi QRS in I , cum circulo QOS in V , agaturq; CV occurrens ei circulo ABD in B , & ad hanc partem rectam PI , e punctis extremis P ac I , erigantur perpendicular-

oscilletur (modo jam descripto) in perimetro Cycloidis QRS dico quod oscillationum utrumq. in equalium equalia erunt Tempora

Nam in Cycloidis tangentem TH infinite productam cadat perpendicularum CV & iungatur CI . Quoniam vis centripeta quia corpus I impellitur vertus C est ut distantia CI , (per Legem Corol. 2) resolvitur in parte CV , VI , quarum CV impellendo corpus directe a P distendit filum PI & per cuius resistenti- am tota cessat, nullam aliam edens effectum, pars autem altera VI urgendo corpus transvertim seu vertus V , directe accelerat motum eius in Cycloide, manifestum est quod corporis acceleratio huius vi acceleratrix proportionalis sit singulis momentis ut longitudo VI , id est ob datas CV , VI usq. proportionales VI , TH , ut longitudo TH , hoc est (per Corol. 1 Prop. XLIX) ut longitudo arcus Cycloidis IR . Pendulis igitur duabus API , APT de perpendicularo AR inaequaliter deductis & simul dimissis, accelerationes eorum semper erunt ut arcus describendi IR , & R . Sunt autem partes sub initio descriptae ut accelerationes, hoc est ut totae sub initio describendae, & propterea partes quae manent describendae & accelerationes subsequentes his partibus proportionales sunt etiam ut totae, & sic deinceps. Sunt igitur accelerationes atq. adeo velocitates genitae & partes his velocitatibus descriptae partemq. describendam, semper ut totae & propterea partes describendae datam servantem rationem ad invicem similes- vanebunt, id est corpora duo oscillantia simul perveniunt ad perpendicularum AR . Cumq. vultum ascensus perpendicularorum de loco initio R , per eodem arcus Trochoidales motu retrogrado facti, retardentur in locis singulis a viribus inde a quibus descen- dis accelerabantur, patet velocitates ascensuum ac descensuum per eodem arcus lactorum aequales esse atq. adeo temporibus aequalibus fieri & propterea cum Cycloides partes duae RS & RQ ad utrumq. perpendiculari latus iacentes sint similes & aequales, pendula duo oscillationes suas tam totas quam dimidias inde tem- poribus semper peragent. Q. E. D.

Prop. LII. Prob. XXXIV.

Definire & velocitates Pendulorum in locis singulis, & Tempora quibus tum oscillationes totae, tum singulae oscillationum partes peraguntur.

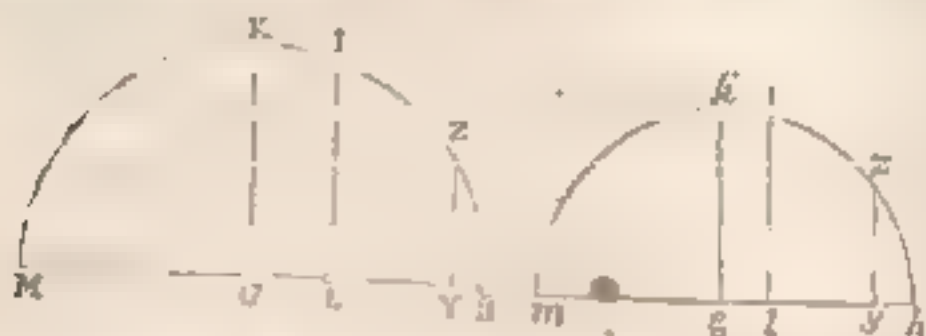
Centro quovis C intervallo GH Cyclo describam RS & perante, describe semicirculum $HKMG$ semidiametro CK & a centro C si vis centripeta duranti locorum a centro proportionalis tendat ad eam in C sitq; ea in perimetro $HKMG$ equali virescente in perimetro, sicut Q & S (Vide Fig. Prop. L. & 11) ad punctum C tendente, & eodem tempore quo pendulum I descendit e loco supremo S , cadat corpus aliquod L ab H ad C quoniam vires quibus corpora urgentur sunt aequales sub initio & spatia describendis TR , CL temporales proportionales, atq; adeo, si aequantur TR ad LG , aequales in locis I & L , patet corpora illa describere spatia SI , HL aequalia sub initio, adeoque, subinde peragere aequaliter urgeri, & aequalia spatia describere Quare, per Prop. XXXVIII., tempus quo corpus descendit arcum SI est ad tempus oscillationis unius, ut arcus HI (tempus quo corpus H pervenit ad L) ad semicirculum $HKMG$ (tempus quo corpus H pervenit ad M) Et velocitas corporis penduli in loco I est ad velocitatem ipsius in loco infimo K , (hoc est velocitas corporis H in loco L ad velocitatem eius in loco C , seu incrementum momentaneum lineae HL ad incrementum momentaneum lineae HC , arcibus HI , HK aequali fluxu circuli) ut ordinatum applicata LI ad radium CK , sive ut $\sqrt{SK}q$ - TRq ad SR Unde cum in Oscillationibus maxequalibus describantur aequalibus temporibus arcus totae Oscillationum arcibus proportionales habebitur ex datis

W

tem-

temporibus & velocitates & arcus descripti in Oscillationibus univ-
ersis. Quæ erant primo inveniendæ.

Oscillantur nam semipendula duo corpora in Cycloidibus inæ-
qualibus & earum semidiametris æquales capiuntur rectæ GH, gh ,
centra p, G, g & intervalla GH, gh describuntur semicirculi
 $HZA M, bzkm$. In eorum diametris HM, hm capiuntur a-
rcule æquales HT, hy , & erigantur normaliter TZ, yz circum-
ferentis occurrentes in Z & z . Quoniam corpora prædicta sub
motu motus vertantur in circumferentia globi QDS , adeoque a vi-
ribus æqualibus urgentur in centrum, ut ipsi motus dicere possunt
certum moveri, spatia simul collecta æqualia erunt sub eodem
Urgente igitur corpora H, h a viibus undem in H & h , sitque



HT, hy spatia æqualia ipso motu in uno descripta, & arcus HZ
 bz denotent æqualia tempora. Horum arcuum nacentium
ratio prima duplicata est ead. in quæ rectangulorum GH, gh ,
id est, eadem quæ linearam GH, gh , adeoque arcus capiti in di-
midata ratione semidiametrorum denotant æqualia tempora. Est
ergo tempus totum in circulo $HZA M$, Oscillationi in una Cyclo-
ide respondens, ad tempus totum in circulo $bzkm$ Oscillationi in
altera Cycloide respondens, ut semipendula $HZA M$ ad mediam
proportionem inter hanc semipendulam & semipendulam circuli
alteri $bzkm$, id est in dimidiata ratione diametri HM ad diame-
trum hm , hoc est in dimidiata ratione perimetri Cycloidis pri-
mæ ad perimetrum Cycloidis alterius, adeoque tempus illud in Cy-
clo-

cloide quavis est (per Corol. 3. Prop. XLIX.) ut latus quadratum rectanguli BEC contenti sub semidiametro Rotæ, qua Cycloides descripta sunt, & differentia inter semidiametrum istam & semidiametrum globi. Q. E. I. Est & idem tempus (per Corol. Prop. L.) in diuidata ratione longitudinis AR Q. E. I.

Porro si in globi concentricis describantur similes Cycloides quoniam earum perimetri sunt et semidiametri globorum, & ut in analogis perimetrorum loci sunt et distantia locorum a communi globorum centro, hoc est ut globorum semidiametri, atque adeo ut Cycloidum perimetri & perimetrorum partes similes, a qualia erunt corpora quibus perimetrorum partes similes Oscillationibus similibus describantur, & propterea Oscillationes eundem erunt hoc tempore. Cum igitur Oscillationum tempora in Cycloide dato sint in diuidata ratione longitudinis AR , atque adeo (ob datam AC) in diuidata ratione numeri $\frac{AR}{AC}$, id est in ra-

tione integri numeri $\frac{AR}{AC}$, & licet numerus $\frac{AR}{AC}$ servata ratione AR ad AC (ut sit in Cycloidibus similibus) idem semper maneat, & propterea in globis diversis, ubi Cycloides sunt similes, ut et tempus manifestum est quod Oscillationum tempora in alio quouis globo dato, atque adeo in globis omnibus concentricis sint ut numerus $\frac{AR}{AC}$, id est, in ratione composita ex diuidata ratione longitudinis scilicet AR directè & diuidata ratione semidiametri globi AC inverse. Q. E. I.

Hæc quæ sunt absolute ueritatem globorum ponantur inæqualia, accelerationes temporibus æqualibus factæ, erunt ut vires. Unde si tempora capiantur in diuidata ratione virium inverse, velocitates erunt in eadem diuidata ratione directè, & propterea spatiæ erunt æquales quæ his temporibus describuntur. Ergo Oscillationes in pæob & Cycloidibus omnibus, quibuscumque et in viribus absolutis factæ, sunt in ratione quæ composita ex di-

mediata ratione longitudinis Penduli directe, & dimidiata ratione distantiae inter centrum Penduli & centrum globi inverse, & dimidiata ratione vis absolute etiam inverse, id est, si vis illa dicatur F , in ratione namque $\frac{AR}{AC \times F}$. Q. E. I.

Corol. 1. Hinc etiam Oscillantium, cadentium & revolventium corporum tempora possunt inter se conferri. Nam si Rotæ, quæ Cyclois intra globum describitur, diameter constituatur æqualis semidiametro globi, Cyclois evadet linea recta per centrum globi traniens & Oscillatio iam erit descensus & sublequens alio die in hac recta. Unde datur tum tempus descensus de loco quovis ad centrum, tum tempus sublequens æquale quo corpus uniformiter circa centrum globi ad eundem locum quovis revolvendo arcum quadrantalem describit. Fit etiam hoc tempus (per Casum secundum) ad tempus semicirculi æquale in Trochoidæ quavis APD ut $\frac{1}{2}BC$ ad \sqrt{BEC} .

Corol. 2. Hinc etiam constat quæ *D. C. Hugenius* & *D. C. Hugenius* de Cyclois videri adinvenierunt. Nam si Globi diameter circumferentiam in se recipiat ut sit superficies spatiosa in planis, vel perpendiculariter aut non ita secundum lineas huiusmodi perpendiculares, & Cyclois rotata a se in Cycloidem vel Trochoidem in eadem longitudine arcus Cycloidis inter planum illud & punctum deviationis, quævis ex deo prædicto unius vel alterius lateris. Pote inter idem planum & punctum d. terreberi ut invenit *D. C. Hugenius*. Et pendulum inter duas ejusmodi Cycloides situm in & æquali Cycloide temporibus æqualibus Oscillabitur, ut demonstravit *Hugenius*. Nec & tempus gravium tempore Oscillationis unius, is erit quem *Hugenius* indicavit.

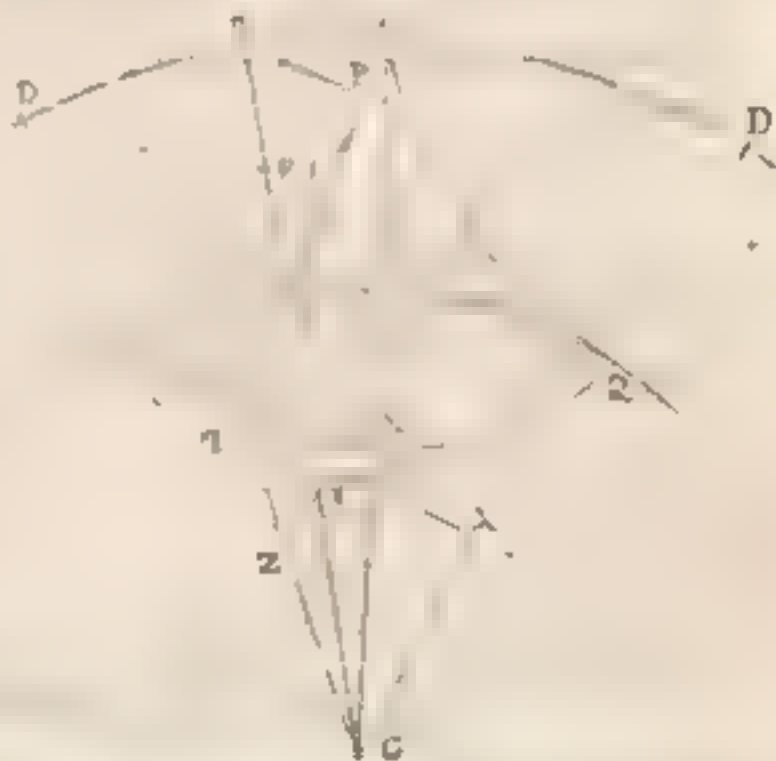
Apertantur autem Propositiones a nobis demonstrata ad veram constitutionem Terræ, quatenus Rotæ erudo in eius circulis maximis describant motu clavorum Cycloides extra globum, & Pendula inferius in fodinis & cavernis Terræ ut penam, in Cyclois intra

intra globos Oscillari debent, ut Oscillationes omnes evadant Isochronæ. Nam gravitas (ut in Libro tertio docebitur) decre-
scit in progressu a superficie Terræ, sursum quidem in duplicata
ratione distantiarum a centro epi , deorsum vero in ratione sim-
plici.

Prop. LIII. Prob. XXXV.

*Concessis figurarum curvilinearum Quadraturis, invenire vires qui-
bus corpora in datis curvis lineis Oscillationes semper Isochronas
peragent.*

Oscilletur cor-
pus T in curva
quavis linea $ST-
RQ$, cujus axis
sit OR transiens
per A , cum cen-
trum C . Agatur
 TX quæ curvam
illam in corporis
loco quovis T
contingat, inq;
hac Tangente $T-
X$ capiatur TY
æqualis arcui $T-
R$. Nam longitu-
do arcus illius ex
figurarum Qua-



daturæ per Methodos vulgares innotescit. De puncto T educa-
tur recta TZ Tangenti perpendicularis. Agatur CT perpendi-
culari illi occurrens in Z , & erit vis centripeta proportionalis rec-
tæ TZ . Q. E. I

Nam si q a corpus trahitur de T versus C , exponatur per
rectam TZ captam ipsi proportionalem, resolvetur hæc in vires
 TY ,

fitq; Dd partium illarum aliqua. Centro C , intervallis CD , Cd describantur circuli DT , dt , Lineæ curvæ ST & R occurrentes in T & t . Et ex data tum lege vis centripetæ, tum altitudine CS de qua corpus cecidit, dabitur velocitas corporis in alia quavis altitudine Ct , per Prop. XXXIX. Tempus autem, quo corpus descendit lineolam Tt , est ut lineolæ hujus longitudo (id est ut secans anguli ITC) directe, & velocitas inverse. Tempus hinc proportionale sit ordinatæ applicatæ DN ad rectam CS per punctum D perpendicularitatem, & ob datam Dd erit rectangulum Ddx DN , hoc est area $DNnd$, eodem tempore proportionalis. Ergo si NDn sit curva illa linea quam punctum N perpetuo tangit, erit area $SNDS$ proportionalis tempore quo corpus descendendo describit lineam ST , proindeq; ex inventa illa area dabitur tempus. Q. E. I.

Prop. LV. Theor. XIX.

Si corpus movetur in superficie quacunque curva, cujus axis per centrum curvæ tenet, & a corpore in axem demittatur perpendicularis, ut, parallela & a punctis ad axem puncto, quoties ducatur duo quod parallela illa aream tempore proportionalem describet.

Sit BSH I superflua curva I corpus in ea revolvens, ST & R Trajectoria quam corpus in eadem describit, S initium Trajectoriae, $OMNK$ axis superfliciei curvæ, IN recta a corpore in axem perpendicularis, OP hinc parallela & æqualis a puncto O quod in axe datur ordinata, AP velutiam Trajectoriae a puncto P

in lineæ volubilis OP plano AOP descriptum, A vestigii initium puncto S respondens, TC recta a corpore ad centrum ducta, TG pars eius vi centripetæ qua corpus urgetur in centrum C proportionalis, TM recta ad superficiem curvam perpendicularis, TI pars eius vi pressiois quæ corpus urget superficiem, vicissimq; urgetur versus M a superficie, proportionalis, PHI recta axi parallela per corpus transiens, & GF , IH rectæ a punctis G & I in parallelam illam PHI perpendiculariter demissæ. Dico jam quod area AOP , radio OP ab initio motus descripta, sit temporis proportionalis. Nam vis TG (per Legum Corol. 2.) resolvitur in vires TF , FG , & vis TI in vires TH , HI . Vires autem TF , TH agendo secundum lineam PF plano AOP perpendicularitatem mutant solummodo motum corporis quatenus huic plano perpendicularitatem. Ideoque motus eius quatenus secundum perturbationem plani factus, hoc est motus puncti P , quo Tractato de vestigiis AP in hoc plano describitur, idem est ac si vires TF , TH tollerentur, & corpus solis viribus FG , HI ageretur, hoc est idem ac si corpus in plano AOP vi centripetæ ad centrum O tendente & summam virium FG & HI æquante, describeret curvam AP . Sed vitali describetur area AOP (per Prop. I) temporis proportionalis. Q. E. D.

Corol. Eodem argumento si corpus a viribus agitatum ad centra duo

duo vel plura in eadem quavis recta CO data tendentibus, describeret in ipso libero lineam quamcunque curvam ST , foret area AOP tempori temper proportionalis.

Prop. LVI. Prob. XXXVII.

Concessis figurarum circularium Quadraturis, datus, tum lege eius centripetæ ad centrum datum tenentis, tum superflue curvæ cuius axis per centrum illud tractu, inveniendâ, sive Trajectoria plani corpus in eadem superficie describat, de loco dato, data cum velocitate versus planam in superficie illa datam egressum.

Stantibus quæ in præteriore Propositione constructa sunt, exeat corpus de loco S in Trajectoriam inveniendam ST & R , & ex data eius velocitate in altitudine SC dabitur eius velocitas in alia quavis altitudine TC . Ea cum velocitate, dato tempore quam minimo, describat corpus Trajectorie hanc particulam It , Itaque Pp vettigiam eius plano AOP descriptam. Sumatur Op , & circuli centro I intervallo It in superflue curvæ descriptæ PpQ vettigium Ellipticum in eodem plano $OAPp$ descriptum. Et ob datam magnitudinem & positionem circuli, dabitur Ellipsis illa PpQ . Cuius area POp it tempori proportionalis, atque adeo ex dato tempore detur, dantur Op positione, & inde dabitur communis eius & Ellipseos intersectio p una cum angulo OPp , in quo Trajectorie vettigiam APp tangat lineam OP . Inde autem invenietur Trajectorie vettigium illud APp , eadem methodo qua curva linea $Ithk$ in Propositione XLII. ex similibus datis inventa fuit. Tum ex similibus vettigii punctis P extendendo ad planum AOP perpendiculara PI usque ad curvæ occurrence in T , dabuntur singula Trajectorie puncta T . Q. E. D.

S E C T. XI.

*De Motu Corporum Sphaericorum viribus centripetis se mutuo poten-
tium.*

Hactenus exposui motus corporum attractorum ad centrum immobile, quale tamen vix extat in rerum natura. Attractiones enim fieri solent ad corpora, & corporum trahentium & attractorum actiones semper aequales sunt & æquales, per Legem tertiam: adeo ut neq. attrahens possit quiescere neq. attractum, si duo sint corpora, sed ambo (per Legem Corollarium quartum) quasi attractione mutua, circum gravitatis centrum commune revolvantur & si plura sint corpora (quæ vel ab unico attrahantur vel omnia se mutuo attrahant) hæc ita inter se moveri debeant, ut gravitatis centrum commune vel quiescat vel uniformiter moveatur in directum. Qua de causa jam pergo motum exponere corporum se mutuo trahentium, & considerando vires centripetas tanquam Attractiones, quamvis fortasse, si physice loquamur, verius dicantur Impulsus. In Mathematicis enim jam versamur, & propterea multis disputationibus Physicis, familiari utimur iermone, quo possimus a Lectoribus Mathematicis facilius intelligi.

Prop. LVII. Theor. XX.

*Corpora duo se invicem trahentia decedunt, & circum commune
centrum gravitatis & circum se mutuo figuræ similes.*

Sunt enim distantia a communi gravitatis cent. & reciproce proportionales corporibus, atq. adeo in data ratione ad invicem, & componendo, in data ratione ad distantiam totam inter corpora. Feruntur autem hæc distantia circum terminos suos communi mo-
tu

ru angulari, propterea quod in directum semper jacentes non mutant inclinationem ad se mutuo. Lineæ autem rectæ, quæ sunt in data ratione ad invicem, & æquali motu angulari circum terminos suos feruntur, figuras circum eisdem terminos (in planis quæ una cum his terminis vel quiescunt vel motu quovis non angulari moventur) describunt omnino similes. Proinde similes sunt figure quæ his distantis circumactis describuntur. Q. E. D.

Prop. LVIII. Theor. XXI.

Si corpora duo viribus quibusvis se mutuo trahunt, & interea revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quod figuris, quas corpora sic mota describunt circum se mutuo, potest figura similis & æqualis, circum corpus alterutrum immotum, viribus usdem describi.

Revolvantur corpora S, P circa commune gravitatis centrum C , pergendo de S ad T deq. P ad Q . A dato puncto s ipsiis SP , TQ æquales & parallele ducantur semper sp, sq , & curva pqc quam punctum p , revolvendo circum punctum immotum c , descri-



bit, erit similis & æqualis curvis quas corpora S, P describunt circum se mutuo. proudeq. (per Theor. XX.) similis curvis ST & PQV , quas eadem corpora describunt circum commune gravitatis centrum C : id adeo quia proportionēs linearum SC, CP & SP vel sp ad invicem dantur.

Cas. 1. Commune illud gravitatis centrum C , per Legem Cor-

scribantur arcus PQ , pq , qui sunt in ratione integra. Et corpora P , p viribus æqualibus semper attracta describent circum centra quiescentia C & c figuras summes PQV , pqv , quarum posterior pqv similis est & æqualis figuræ quam corpus P circum corpus mobile S describit. Q. E. D.

Cas. 2. Ponamus jam quod commune gravitatis centrum, una cum spatio in quo corpora moventur inter se, progreditur uniformiter in directum, &, per Legum Corollarium sextum, motus omnes in hoc spatio peraguntur ut prius, adeoque corpora describent circum se mutuo figuras ead. in ac prius, & propterea figuræ pqv similes & æquales. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc corpora duo viribus distantie suæ proportionalibus se mutuo tractant, & describunt (per Prop. X) & circum commune gravitatis centrum, & circum se mutuo, & ipsæ concentricæ. & vice versa, si tales figure describuntur sunt vires distantie proportionales.

Corol. 2. Et corpora duo viribus quadrato distantie suæ reciprocè proportionalibus describunt (per Prop. XI, XII, XIII) & circum commune gravitatis centrum & circum se mutuo sectiones conicæ umbilicis habentes in centro circa id quod figuræ describuntur. Et vice versa, si tales figure describuntur, vires reciprocè sunt quadrato distantie reciprocè proportionales.

Corol. 3. Corpora duo quævis circum gravitatis centrum commune pyramida, radius & ad centrum illud & ad se mutuo ductis, describunt areas temporibus proportionales.

Prop. LIX. Theor. XXII.

Corporum duorum S & P circa commune gravitatis centrum C revolvendum tempus periodicum esse ad tempus periodicum corporis alterutrinus P , circa alterum immotum S gyantis & figuris quæ corpora circum se mutuo describunt figuram similem & æqualem describentis, in duplicata ratione corporis alterius S , ad summam corporum $S + P$.

Namq;

Namq; ex demonstratione superioris Propositionis, tempora quibus arcus quivis similes PQ & pq describuntur, sunt in dimidiata ratione distantiarum CP & SP vel sp , hoc est, in dimidiata ratione corporis S ad summam corporum $S + P$. Et componendo, summa temporum quibus arcus omnes similes PQ & pq describuntur, hoc est tempora tota quibus figuræ totæ similes describuntur, sunt in eadem dimidiata ratione. Q. E. D.

Prop. LX. Theor. XXIII.

Si corpora duo S & P , viribus quadrato distantia sua reciproce proportionalibus se mutuo trahentia, revolvuntur circa gravitatum centrum commune. dico quod Ellipseos, quam corpus alterutrum P hoc motu circa alterum S describit, Axis transversus erit ad axem transversum Ellipseos, quam corpus idem P circa alterum quiescens S eodem tempore periodico describere posset, ut summa corporum duorum $S + P$ ad primam duarum medie proportionalium inter hanc summam & corpus illud alterum S .

Nam si descriptæ Ellipses essent sibi invicem æquales, tempora periodica, per Theorema superius, forent in dimidiata ratione corporis S ad summam corporum $S + P$. Minuatur in hac ratione tempus periodicum in Ellipsi posteriore, & tempora periodica evadent æqualia, Ellipseos autem axis transversus per Theorema VII. mutuetur in ratione cuius hæc est triplicata, id est in ratione, cuius ratio S ad $S + P$ est triplicata, adeoq; ad axem transversum Ellipseos alterius, ut prima duarum medie proportionalium inter $S + P$ & S ad $S + P$. Et inverse, axis transversus Ellipseos circa corpus mobile descriptæ erit ad axem transversum descriptæ circa immobile, ut $S + P$ ad primam duarum medie proportionalium inter $S + P$ & S . Q. E. D.

Prop.

Prop. LXI. Theor. XXIV.

Si corpora duo viribus quibuscumque se mutuo trahentia, neque aliis agitata vel impedita, quomodocumque moventur, motus eorum perinde se habebunt ac si non traherent se mutuo, sed utrumque a corpore tertio in communi gravitatis centro constituto viribus illidem traheretur. Et Virium trahentium eadem erit Lex respectu distantie corporum a centro illo communi atque respectu distantie totius inter corpora.

Nam vires illæ, quibus corpora se mutuo trahunt, tendendo ad corpora, tendunt ad commune gravitatis centrum intermedium, adeoque eadem sunt ac si a corpore intermedio manarent. Q. E. D.

Et quoniam data est ratio distantie corporis utriusvis a centro illo communi ad distantiam corporis eiusdem a corpore altero, dabitur ratio eorum potentie distantie utriusque ad eandem potentiam distantie alterius, ut & ratio virutatis cuiusvis, quæ ex una distantia & quantitatis datis utriusque derivatur, ad quantitatem alterius, præ ex altera distantia & quantitatis totidem datis datamque, illam distantiam unam rationem ad priores habentibus similiter derivatur. Proinde si vis quæ corpus unum ab altero trahit, sit directe vel inverse ut distantia corporum ab invicem, vel ut quolibet huius distantie potentia, vel denique ut quantitas quævis ex hac distantia & quantitatis datis quomodocumque derivata erit eadem vis, quæ corpus idem ad commune gravitatis centrum trahitur, directe videlicet vel inverse ut corpori aut eadem distantia a centro illo communi, vel ut eadem distantie huius potentia, vel denique, ut quantitas ex hac distantia & analogis quantitatis datis similiter derivata. Hoc est Vir trahens eadem erit Lex respectu distantie utriusque. Q. E. D.

Prop. LXII. Prob. XXXVIII.

Corporum duorum quæ tribus quodvis distantie suæ reciproce proportionalibus se mutuo trahunt, ac de locis datis demittuntur, determinare motus.

Corpora, per Theorema novissimum, perinde movebuntur, ac si a corpore tertio in communem gravitatis centro communito traherentur & centum illud ipso motu initio quæret (per Hypothesin) & propterea per Legem Corol. 4, semper quæret. Determinandi igitur motus Corporum (per Probl. XXV.) potest ac si a viribus ad centrum illud tendentibus urgeretur, & habebuntur motus corporum se mutuo trahentium. Q. E. I.

Prop. LXIII. Prob. XXXIX.

Corporum duorum quæ eisdem quodvis distantie suæ reciproce proportionalibus se mutuo trahunt, duq; locis datis, secundum datas rectas, datis enim elevationibus exeunt, determinare motus.

Ex datis corporum motibus sub initio, datur ut formis motus centri communis gravitatis, ut & motus spatii quod una cum hoc centro moveatur uniformiter inducitur, nec non corporum motus initiales respectu huius spatii. Motus autem subsecuentes (per Legem Corollariam quartam & Theorema novissimum) peti de hinc in hoc spatio ac si spatium ipsum una cum centro illo gravitatis centro quæret, & corpora non traherentur a mutuo, sed a corpore tertio in centro illo traherentur. Corpora igitur alterum in hoc spatio mobili de loco dato, secundum datam rectam, data enim velocitate exeuntis, & vi centripeta ad centrum illud tendente correpta, determinandas est motus per Problema novum & vicinum sextum: & habebitur simul motus corporis alterius e regione. Cum hoc motu componendas est uniformis ille Systematis spatii & corporum in eo gyrantium
motus

motus progressivus supra inventus, & habebitur motus absolutus corporum in spatio immobili. Q. E. I.

Prop. LXIV. Prob. XL.

Viribus quibus Corpora se mutuo trahunt crescentibus in simplici ratione distantiarum a centro: requiruntur motus plurimum Corporum inter se.

Ponantur imprimis corpora duo T & L commune habentia gravitatis centrum D . Describent hæc per Corollarium primum Theorematis XXI. 1. ipsius centra habentes in D , quarum magnitudo ex Problemate V. annotetur.

Trahat jam corpus tertium S priora duo T & L viribus acceleratricibus ST , SL , & ab ipsis vicissim trahatur. Vis ST per Legum Corol. 2. resolvitur in vires SD , DT ; & vis SL in vires SD , DL . Vires autem DT , DL , quæ sunt ut ipsarum summa TL , atq; adeo ut vires acceleratrices quibus corpora T & L se mutuo trahunt, additæ his viribus corporum T & L , prior prior & posterior posteriori, componunt vires distantis DT ac DL proportionales, ut prius, sed viribus prioribus majores, adeoque (per Corol. 1. Prop. X. & Corol. 1 & 7 Prop. IV) efficiunt ut corpora illa describant Elliptes ut prius, sed motu celeriore. Vires reliquæ acceleratrices SD & SD , actionibus motricibus $SD \times T$ & $SD \times L$, quæ sunt ut corpora, trahendo corpora illa æqualiter & secundum lineas TI , LI ipsi DS parallelas, nil mutant illas earum ad invicem, sed faciunt ipsa æqualiter accedere ad lineam IK , quam ductam concipe per medium corporis S , & lineæ DS perpendiculararem. Impedietur autem iste ad lineam IK accessus



rum ab eorundem centro, moveri posse inter se in Ellipsis, & radius ad umbilicos ductus Areas describere temporibus proportionales quam proxime.

In Propositione superiore demonstratus est casus ubi motus plures peraguntur in Ellipsis accurate. Quo magis recedit lex viri, in a lege ibi posita, eo magis corpora perturbabunt mutuos motus, neq. fieri potest ut corpora secundum legem hic positam se mutuo trahentia moveantur in Ellipsis accurate, nisi servando certam proportionem distantiarum ab invicem. In sequentibus autem casibus non multum ab Ellipsis erroratur.

Cas. 1. Pone corpora plura minora circa maximum aliquod ad varias ab eo distantes & volu, tendantq. ad ingula vires absolute proportionales mada corporum vis. Et quoniam omnium commune gravitatis centrum (per Lemma Corol. quartum.) vel quiescet vel movebitur uniformiter in directum, fingamus corpora minora tam parva esse, ut corpus maximum nunquam distet sensibiliter ab hoc centro, & maximum illud vel quiescet vel movebitur uniformiter in directum, abiq. errore sensibili. minora autem revolvantur circa hoc maximum in Ellipsis, atq. radius ad idem ductus describit areas temporibus proportionales, nisi quatenus errores inducuntur, vel per errorem maximi a communi illo gravitatis centro, vel per actione maiorum corporum in se mutuo. Simpliciter autem possunt corpora minora usq. donec error ille & actiones mutue sint datæ quovis minor, atq. adeo donec se habent cum Ellipsis quadrat, & areas respondeant temporibus abiq. errore qui non sit minor quovis dato. Q. E. D.

Cas. 2. Fingamus iam Systema corporum minorum modo iam descripto circa maximum revolvendum, alii dñe quodvis duorum circum se mutuo revolvendum corporum Systema proce- di uniformiter in directum, & interea vi corpori alterius longe maximi & ad magnam distantiam sit urgeri ad lras. Et quoniam æquales vires acceleratrices, quibus corpora secund. in lineas parallelas urgentur, non mutant situs corporum ad invicem, sed ut Sys-

tema totum, servatis partium motibus inter se, simul transferatur efficiant: manifestum est quod ex attractionibus in corpus maximum, nulla prius oritur mutatio motus attractorum inter se, nisi vel ex attractionum accelerantium inaequalitate, vel ex inclinatione linearum ad invicem, secundum quas attractiones sunt. Pone ergo attractiones omnes acceleratrices in corpus maximum esse inter se reciproce ut quadrata distantiarum, & augendo corporis maximi distantiam, deinceps rectarum ab hoc ad reliqua ductarum minores sint differentia & inclinationes ad invicem quam datae quavis, perseverabunt motus partium Systematis inter se absq; erroribus qui non sint quibuscvis datis minores. Et quoniam, ob exiguam partium ularum ab invicem distantiam, Systema totum ad modum corporis unius attrahitur, movebitur idem hac attractione ad modum corporis unius, hoc est, centro suo gravitatis describet circa corpus maximum, Sectionem aliquam Conicam (*viz.* Hyperbolam vel Parabolam attractione languida, Ellipsim fortiore,) & Radio ad maximum ducto, verret areas temporis proportionales abiq; ulli erroribus, nisi quas partium distantiae (per exiguam tamen & pro lubitu nuncuenda) valeant efficere. Q. E. O.

Simili argumento pergere licet ad casus magis compositos in infinitum.

Corol. 1. In casu secundo, quo propius accedit corpus omnium maximum ad Systema duorum vel plurimum, eo magis turbabuntur motus partium Systematis inter se, propterea quod hocceum a corpore maximo ad haeductarum tunc major est inclinatio ad invicem, majorq; proportionis inaequalitas.

Corol. 2. Maxime autem turbabuntur, ponendo quod attractiones acceleratrices partium Systematis versus corpus omnium maximum, non sint ad invicem reciproce ut quadrata distantiarum a corpore illo maximo, praesertim si proportionis istius inaequalitas maior sit quam inaequalitas proportionis distantiarum a corpore maximo: Nam si vis acceleratrix, equaliter & secundum lineas pa-

parallelas agendo, nil perturbat motus inter se, necesse est ut ex actionis inaequalitate perturbatio orzatur, majorq. sit vel minor pro maiore vel mino e inaequalitate. Excellus impulsuum maiorum agendo in aliqua corpora & non agendo in alia, necessario mutabunt situm eorum inter se. Et haec perturbatio addita perturbationi, quae ex linearum inclinatione & inaequalitate oritur, maiorem reddet perturbationem totam.

Corol. 3. Unde si Systematis huius partes in Ellipsis vel Circulis sine perturbatione insigni moveantur, manifestum est, quod eadem a viribus acceleratricibus ad alia corpora tendentibus, aut non urgentur nisi levissime, aut urgentur aequaliter & secundum lineas parallelas quaproxime.

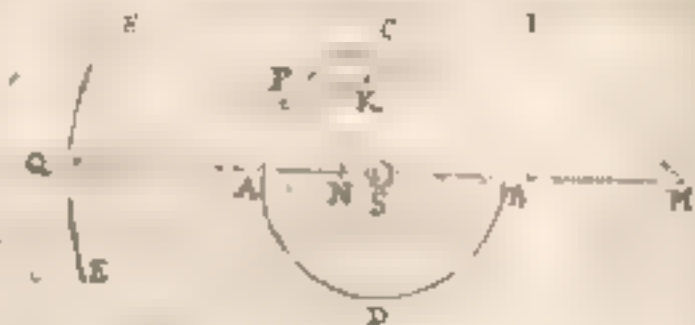
Prop. LXVI. Theor. XXVI.

Si corpora tria, quorum vires decrescunt in duplicata ratione distantiarum, se mutuo trahant, & attractiones acceleratrices binorum quorumcumq. in tertium sunt inter se reciprocae ut quadrata distantiarum, minora autem circa maximum in plano communis revolvantur. Dico quod interior circa minimum & maximum, radius ad ipsum ductus, describet areas temporibus magis proportionales, & figuram ad formam Ellipticam umbilicum in concursu radiorum habentis magis accedentem, si corpus maximum his attractionibus agitur, quam si maximum illud vel a minoribus non attractum quiescat, vel multo minus vel multo magis attractum aut multo minus aut multo magis agitur.

Liquet fere ex demonstratione Corollarii secundi Propositionis praecedentis, sed argumento magis distincto & latius cogente sic evincitur.

Cas. 1. Revolvantur corpora minora P & Q in eodem plano circa maximum S , quorum P describat orbem interiores PAB , & Q exteriores QEF . Sit QK mediocris distantia corporum P & Q , & corporum P versus Q attractio acceleratrix in mediocri illa distantia exponatur per eandem. In duplicata ratione QK
ad

ad QP capiatur QL ad QK , & erit QL attractio acceleratrix corporis P versus Q in distantia quavis QP . Junge PS , etq; parallelam age LM occurrentem QS in M , & attractio QL resolvetur (per Legum Corol. 2) in attractiones QM , LM . Et sic urgebitur corpus P vi acceleratrice triplici: una tendente ad S & oriunda a mutua attractione corporum S & P . Hac vi sola corpus P , circum corpus S sive immotum, sive hac attractione agitatum, describere deberet & areas, radio PS temporibus proportionales, & Ellipsin cui umbilicus est in centro corporis S . Patet hoc per Prob. VI & Corollaria Theor. XXI. Vis altera est attractionis LM , quæ quoniam tendit a P ad S , superaddita vi priori coincidet cum ipsa, & sic faciet ut area etiamnum temporibus proportionales describantur per Corol. 3. Theor.



XXI. At quoniam non est quadrato distantia PS reciproce proportionalis, componet ea cum vi priore vim ab hac proportionē aberrantem, idq; eo magis quo major est proportio huius vis ad vim priorem, ceteris paribus. Proinde cum (per Corol. 1. Prob. VIII & Corol. 2. Theor. XXI.) vis qua Ellipsis circa umbilicum S describitur tendere debeat ad umbilicum illum, & eade quadrato distantia PS reciproce proportionalis, vis illa composita aberrando ab hac proportionē, faciet ut Orbis PAB aberret a forma Ellipseos umbilicum habentis in S , idq; eo magis quo major est aberratio ab hac proportionē, atq; adeo etiam quo major est proportio vis secundæ LM ad vim primam, ceteris paribus. Jam vero vis tertia QM , trahendo corpus P secundum lineam ipsi QS parallelam, componet cum viribus prioribus vim quæ non amplius distinet a P in S , quaq; ab hac determinatione tanto ma-

magis aberrat, quanto major est proportio huius tertiz vis ad vires priores, ceteris paribus, atq; adeo quæ faciet ut corpus P , radio SP , areas non amplius temporibus proportionales describet, atq; aberratio ab hac proportionalitate ut tanto maior sit, quanto major est proportio vis huius tertiz ad vires ceteras. Orbis vero PAB aberrationem a forma Elliptica prælatâ hæc vis tertia duplici de causa adaugebit, tum quod non dirigitur a P ad S , tum etiam quod non sit proportionalis quadrato distantiz PS . Quibus interiectis, manifestum est quod areas temporibus tum maxime sunt proportionales, ubi vis tertia, manentibus viribus ceteris, sit minima, & quod Orbis PAB tum maxime accedit ad prælatam formam Ellipticam, ubi vis tam secunda quam tertia, sed præcipue vis tertia, sit minima, vi prima manente.

Exponatur corpus S attractio acceleratrix verius Q per lineam QN , & si attractiones acceleratrices QM , QN æquales essent, hæc trahendo corpora S & P æqualiter & secundum lineas parallelas, nil mutarent situm eorum ad invicem. Idem iam forent corporum illorum motus inter se (per Legum Corol. 6.) ac si hæc attractiones tollerentur. Et pari ratione si attractio QN minor esset attractione QM , tolletet ipsa attractionis QM partem QN , & maneret pars sola MN , quæ temporum & arcarum proportionalitas & Orbitæ forma illa Elliptica perturbaretur. Et similiter si attractio QN maior esset attractione QM , oriretur ex differentia sola MN perturbatio proportionalitatis & Orbitæ. Sic per attractionem QN reducitur semper attractio tertia superior QM ad attractionem MN , attractione prima & secunda manentibus prorsus immutatis. & propterea areas ac tempora ad proportionalitatem, & Orbita PAB ad formam prælatam Ellipticam tum maxime accedunt, ubi attractio MN vel nulla est, vel quam fieri possit minima, hoc est ubi corporum P & S attractiones acceleratrices, tactæ verius corpus Q , accedunt quantum fieri potest ad æqualitatem, id est ubi attractio QN non est nulla, neq; minor minima attractionum omnium QM , sed inter attractionum om-

num QM maximam & minimam quasi mediocri, hoc est, non multo major neq, multo minor attractione QK . Q. E. D.

Cor. 2 Revolvantur jam corpora minora P, Q circa maximum S in planis diversis, & vis LM , agendo secundum lineam PS in plano Orbitæ PAB sitam, eundem habebit effectum ac prius, neq, corpus P de plano Orbitæ suæ deturbabit. At vis altera NM , agendo secundum lineam quæ ipsi QS parallela est, (atq, adeo, quando corpus Q vertatur extra lineam Nodorum, inclinatur ad planum Orbitæ PAB .) præter perturbationem motus in longitudinem jam ante expolitam, inducet perturbationem motus in latitudinem, trahendo corpus P de plano suæ Orbitæ. Et hæc perturbatio in dato quovis corporum P & S ad invicem situ, erit ut vis illa generans MN , adeoq, minima evadet ubi MN est minima, hoc est (ut jam exposui) ubi attractio QN non est multo major neq, multo minor attractione QK . Q. E. D.

Corol. 1. Ex his facile colligitur quod si corpora plura minora P, Q, R &c. revolvantur circa maximum S motus corporis interni P minime perturbabitur attractionibus exteriorum, ubi corpus maximum S pariter a cæteris, pro ratione virium acceleratricum, attrahitur & agitur atq, cætera a se mutuo.

Corol. 2. In Systemate vero trium corporum S, P, Q si attractiones acceleratrices binorum quorumcunq, in rectis sunt ad invicem reciproce ut quadrata distantiarum, corpus P radio PS aream circa corpus S velocius describet prope conjunctionem A & oppositionem B , quam prope quadraturas C, D . Namq, vis omnis quæ corpus P urgetur & corpus S non urgetur, quæq, non agit secundum lineam PS , accelerat vel retardat descriptionem areæ, perinde ut ipsa in antecedentia vel in consequentia dirigatur. Talis est vis NM . Hæc in transitu corporis P a C ad A tendit in antecedentia, motumq, accelerat, dein usq, ad D in consequentia, & motum retardat, tum in antecedentia usq, ad B , & ultimo in consequentia transiundo a B ad C .

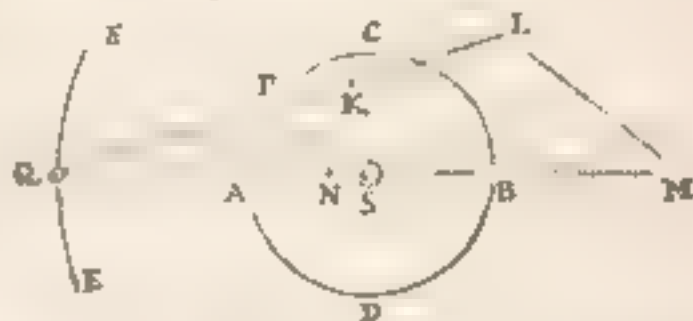
Corol. 3. Et eodem argumento patet quod corpus P , externis par-

paribus, velocius movetur in Conjunctione & Oppositione quam in Quadraturis.

Corol. 4. Orbita corporis *P* ceteris paribus curvior est in quadraturis quam in Conjunctione & Oppositione. Nam corpora velociora minus deflectunt a recto tramite. Et præterea vis *NM*, in Conjunctione & Oppositione, contraria est vi qua corpus *S* trahit corpus *P*, adeoque vim illam minuit, corpus autem *P* minus deflectet a recto tramite, ubi minus urgetur in corpus *S*.

Corol. 5. Unde corpus *P*, ceteris paribus, longius recedet a corpore *S* in quadraturis, quam in Conjunctione & Oppositione. Hæc ita se habent excluso motu Excentricitatis. Nam si Orbita corporis *P* excentrica sit, Excentricitas ejus (ut mox in hujus *Corol. 9.* ostendetur) evadet maxima ubi Apfides sunt in Syzygis, indeq. fieri potest ut corpus *P*, ad Apfidem summam appellans, ablit longius a corpore *S* in Syzygis quam in Quadraturis.

Corol. 6. Quoniam vis centripeta corporis centralis *S*, qua corpus *P* retinetur in Orbe suo, augetur in quadraturis per additionem vis *LM*, ac diminuitur in Syzygis per abla-



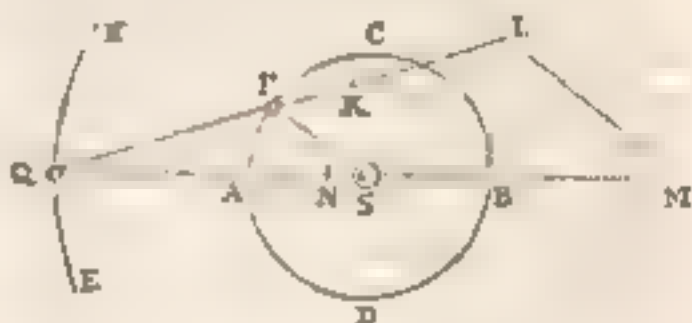
tionem vis *KL*, & ob magnitudinem vis *KL*, magis diminuitur quam augeatur, est autem vis illa centripeta (per *Corol. 2.*, *Prop. IV.*) in ratione composita ex ratione simplici radii *SP* directe & ratione duplicata temporis periodici inverse: patet hanc rationem compositam diminui per actionem vis *KL*, adeoque, tempus periodicum, si maneat Orbis radius *SP*, augeri, idq. in immediata ratione qua vis illa centripeta diminuitur. auctioq. adeo vel diminuto hoc Radio, tempus periodicum augeri magis, vel di-

minui minus quam in Radu hujus ratione sesquuplicata, per Corol. 6. Prop. IV. Si vis illa corporis centralis paulatim langueretur, corpus P minus semper & minus attractum perpetuo recederet longius a centro S , & contra, si vis illa augetetur, accederet propius. Ergo si actio corporis longinqui Q , qua vis illa diminuitur, augeatur ac diminuat per vices, augebitur simul ac diminuetur Radius SR per vices, & tempus periodicum augebitur ac diminuetur in ratione composita ex ratione sesquuplicata Radu & ratione dimidiata qua vis illa centripeta corporis centralis S per incrementum vel decrementum actionis corporis longinqui Q diminuitur vel augetur.

Corol. 7. Ex praemissis consequitur etiam quod Ellipticos a corpore P descriptae axis seu Apsidum linea, quoad motum angularem progreditur & regreditur per vices, sed magis tamen progreditur, & in singulis corporis revolutionibus per excessum progressionis fertur in consequentia. Nam vis qua corpus P urgetur in corpus S in Quadraturis, ubi vis MN evanuit, componitur ex vi LM & vi centripeta qua corpus S trahit corpus P . Vis prior LM , si augeatur distantia PS , augetur in eadem fere ratione cum hac distantia, & vis posterior decrescit in duplicata illa ratione, adeoque tunica hanc non vixit decrescit in minore quam duplicata ratione distantiae PS , & propterea, per Corol. 1. Prop. XLV. facit Augem seu Apidem tamenam regredi. In Conjunctione vero & Oppositione, vis qua corpus P urgetur in corpus S differentia est inter vim qua corpus S trahit corpus P & vim KL , & differentia illa, propterea quod vis KL augetur quamproxime in ratione distantiae PS , decrescit in maiore quam duplicata ratione distantiae PS , adeoque per Corol. 1. Prop. XLV. facit Augem progredi. In locis inter Syzygia & Quadraturas, pendet motus Augis ex causa utraq. communem, adeo ut pro hujus vel alterius excessu progrediatur ipsa vel recedat. Unde cum vis KL in Syzygiis sit quali dupla vi LM in quadraturis, excessus in tota revolutione erit penes vim KL , transietq. Augem singulis re-

revolutionibus in consequentia. Veritas autem hujus & præcedentis Corollari facilius intelligetur concipiendo Systema corporum duorum S, P corporibus pluribus Q, Q, Q &c. in Orbe QE consistentibus, undiq. cingit. Namq. horum actionibus actio ipsius S minuetur undiq. de cæcæ, rectq. in ratione plusquam duplicata distantie.

Corol. 8 Cum autem pendeat Apſidum progressus vel regressus a decremento vis centripetæ tacto in maiori vel minori quam duplicata ratione distantie SP , in transitu corporis ab Apſide una ad Apſidem ſummam, ut & a ſimili incremento in reditu ad Apſidem unam, atq; adeo maximus ſit ubi proportio vis in Apſide ſumma ad vim in



Aplide ima maxime
recedit a duplicata
ratione distantiarum
inversa: manifestum
est quod Aplides in
Syzygus suis, per unam
ablatitiam KL seu
 $NM - LM$, progred-

$NM = LM$, progre-
dientur velocius, inq; Quadraturis suis tardius recedent per viam
admittam LM . Ob diuturnitatem vero temporis quo velocitas
progressus vel tarditas regressus continuatur, sic hæc inæqualitas
longe maxima.

huius vis novæ, fiet magis excentricus. Si jam vis, in recessu corporis ab Aplide ima ad Aplidem summam, decrederet usdem gradibus quibus ante creverat, rediret corpus ad distantiam priorem, adeoque, si vis decreverat in maiori ratione, corpus jam minus attractum ascenderet ad distantiam maiorem & sic Orbis Excentricitas adhuc magis augebatur. Igitur si ratio incrementi & decrementi vis centripetæ hæc illis revolutionibus augeatur, augebitur semper Excentricitas, & e contra, diminuetur eadem si ratio illa decreverat. Jam vero in Systemate corporum S, P, Q , ubi Aplides Orbis PAB sunt in quadraturis, ratio illa incrementi ac decrementi minima est, & maxima sic ubi Aplides sunt in Syzygiis. Si Aplides constituentur in quadraturis ratio prope Aplides minor est, & prope Syzygias maior quam duplicata distantiarum, & ex ratione illa maiori oritur Augmentum motus velocitatis, uti iam dictum est. At si consideretur ratio incrementi vel decrementi totius in progressu inter Aplides, hæc minor est quam duplicata distantiarum. Vis in Aplide ima est ad vim in Aplide summa in maiore quam duplicata ratione distantie Aplidis tantæ ab umbilico Elliptico ad distantiam Apudis tantæ ab eodem umbilico. & e contra, ubi Aplides constituentur in Syzygiis, vis in Aplide ima est ad vim in Aplide summa in maiore quam duplicata ratione distantiarum. Nam vires EM in quadraturis ad vires corporis S componunt vires in ratione minore, & vires AL in Syzygiis subvertunt vires corporis S reliquæ vires in ratione maiore. Est igitur ratio decrementi & incrementi totius in transitu inter Aplides, minima in quadraturis, maxima in Syzygiis, & propterea in transitu Apudam a quadraturis ad Syzygias perpetuo augetur, augetur Excentricitatem Ellipticos; in transitu a Syzygiis ad quadraturas perpetuo diminuitur, & Excentricitatem diminuit.

Corol. 10. Ut rationem incipiamus errorum in latitudinem, fingamus planum Orbis QEL immobile manere, & ex errorum exposita causa manifestum est, quod ex viribus NM, ML , quæ sunt cau-

causa illa tota, vis *ML* agendo semper secundum planum Orbis *PAB*, nunquam perturbat motus in latitudinem, quod, q. vis *NM* ubi Nodi sunt in Syzygiis, atq. nōdo etiam secundum idem Orbis planum, non perturbat hos motus: ubi vero sunt in Quadraturis eos maxime perturbat, corpusq. *P* de plano Orbis sui perpetuo trahendo, minuit inclinationem plani in transitu corporis a quadratura ad Syzygias, augetq. vicissim eandem in transitu a Syzygiis ad quadraturas. Unde sicut corpore in Syzygiis existente inclinatio evadat omnium minima, redeatq. ad priorem magnitudinem circiter ubi corpus ad Nodum proximum accedit. At si Nodi contineantur in Octantibus post quadraturas, id est inter *C* & *A*, *D* & *B* intelligetur ex modo expolitis quod, in transitu corporis *P* a Nodo alterutro ad gradum inde nonagesimum, inclinatio plani perpetuo minuitur, deinde in transitu per proximos 45 gradus, usq. ad quadraturam proximam, inclinatio augetur, & postea denuo in transitu per alios 45 gradus, ut p. ad nodum proximum, diminuitur. Maior itaq. diminuitur inclinatio quam augetur, & propterea minor est semper in nodo subsequente quam in precedente. Et simili ratione inclinatio maior augetur quam diminuitur, ubi nodi sunt in Octantibus alteris inter *A* & *D*, *B* & *C*. Inclinatio igitur tot Nodi sunt in Syzygiis est omnium maxima. In transitu eorum a Syzygiis ad quadraturas, in singulis corporis ad Nodos appulsi, diminuitur, sitq. omnium minima ubi nodi sunt in quadraturis & corpus in Syzygiis. den crevit itidem gradibus quibus antea decreverat, Nodumq. ad Syzygias proximas appulas ad magnitudinem primam revertitur.

Corol. 11. Quoniam corpus *P* ubi nodi sunt in quadraturis perpetuo trahitur de plano Orbis sui, id p. in partem versus *Q*, in transitu suo a nodo *C* per Coniunctionem in *A* ad nodum *D*, & in contrariam partem in transitu a nodo *D* per Oppositionem *B* ad nodum *C*, manifestum est quod in motu suo a nodo *C*, corpus perpetuo recedit ab Orbis sui plano primo *CD*, usq. dum perventum est ad nodum proximum, adeoq. in hoc nodo longissime distans a plano illo primo *CD*, transit per planum Orbis *QIY*,
non

non in plani illius Nodo altero D , sed in puncto quod inde vergit ad partes corporis Q , quodq; proinde novus est Nodi locus in anteriora vergens. Et simili argumento pergent Nodi recedere in transitu Corporis de hoc nodo in nodum proximum. Nodi igitur in quadraturis constituti perpetuo reledunt, in Syzygiis (ubi motus in latitudinem nil perturbatur) quiescunt, in locis intermediis conditionis utriusq; participes recedunt tardius, adeoque semper vel retrogradi vel stationarii singulis revolutionibus seruntur in antecedentia.

Corol. 12. Omnes illi in his Corollariis descripti errores sunt paulo majores in conjunctione Corporum P , Q quam in eorum Oppositione, idq; ob majores vires generantes NM & ML .

Corol. 13. Cumq; rationes horum Corollariorum non pendent a magnitudine corporis Q , obtinent præcedentia omnia, ubi corporis Q tanta statuitur magnitudo ut circa ipsum revolvatur corporum duorum S & P Systema. Et ex aucto corpore Q , auctaq; adeo ipsius vi centripeta, a qua errores corporis P oriuntur, evadent errores illi omnes (paribus distantis) majores in hoc casu quam in altero, ubi corpus Q circum Systema corporum P & S revolvitur.

Corol. 14. Cum autem vires NM , ML , ubi corpus Q longinquum est, sint quamproxime ut vis $\angle h$ & ratio PS ad QS conjunctum, hoc est, si detur tum distantia PS , tum corporis Q vis absoluta, ut QS cub. reciproce, sint autem vires illæ NM , ML causæ errorum & effectuum omnium de quibus actum est in præcedentibus Corollariis: manifestum est quod effectus illi omnes, itante corporum S & P Systemate, sint quamproxime in ratione composita ex ratione directâ vis absolutæ corporis Q & ratione triplicata inversâ distantie QS . Unde si Systema corporum S & P revolvatur circa corpus longinquum Q , vires illæ NM , ML & earum effectus erunt (per Corol. 2. & 6. Prop. IV.) reciproce in duplicata ratione temporis periodici. Et inde si magnitudo corporis Q proportionabilis sit ipsius vi absolutæ, erunt vires illæ

NM

NM , ML & earum effectus directe ut cubus diametri apparentis longinquus corporis Q & corpore S spectati, & vice versa. Namq; hæ rationes eadem sunt atq; ratio superior composita.

Corol. 15. Et quoniam si, manentibus Orbium QE & PAB forma, proportionibus & inclinatione ad invicem, mutetur eorum magnitudo, & si corporum Q & S vel maneat vel mutantur vires in data quavis ratione, hæ vires (hoc est vis corporis S , qua corpus P de recto tranfite in Orbitam PAB defleciunt, & vis corporis Q , qua corpus idem P de Orbita illa deviare cogitur) agunt semper eodem modo & eadem proportionem. necesse est ut similes & proportionales sint effectus omnes & proportionalia effectuum tempora, hoc est, ut errores omnes lineares sint ut Orbium diametri, angulares vero idem qui prius, & errorum linearum similium vel angularum æqualium tempora ut Orbium tempora periodica.

Corol. 16. Unde, si dentur Orbium formæ & inclinatio ad invicem, & mutantur utrunq; corporum magnitudines, vires & distantie, ex datis erroribus & errorum temporibus in uno Casu colligi possunt errores & errorum tempora in alio quovis, quam proxime. Sed brevius hac Methodo. Vires NM , ML cæteris stantibus sunt ut Radius SP , & harum effectus periodici (per *Corol. 2*, l. c. n. X) ut vires & quadratum temporis periodici corporis P conjunctim. Hi sunt errores lineares corporis P , & hæc errores angulares e centro S spectati (id est tam motus Angis & Nodorum, quam omnes in longitudinem & latitudinem errores apparentes) sunt in qualibet revolutione corporis P ut quadratum temporis revolutionis quam proxime. Coniungantur hæ rationes cum rationibus *Corollarii 14*. & in quolibet corporum S , P , Q Systemate, ubi P circum S sibi propinquum, & S circum Q longinquum revolvitur, errores angulares corporis P , de centro S apparentes, erunt, in singulis revolutionibus corporis illius P , ut quadratum temporis periodici corporis P directe & quadratum temporis periodici corporis S inverse. Et inde motus medius

Au-

Augis erit in data ratione ad motem medium Nodorum. & motus uterq; erit ut tempus periodicum corporis P directe & quadratum temporis periodici corporis S inverse. Augendo vel minuendo Excentricitatem & Inclinationem Orbis PAB non mutantur motus Augis & Nodorum sensibiliter, nisi ubi eadem sunt nimis magnæ.

Corol 17. Cum autem linea LM nunc maior sit nunc minor quam radius PS , Exponatur vis mediocris LM per radium illum PS , & erit hæc ad vim mediocrem QK vel QN (quam exponere licet per QS) ut longitudo PS ad longitudinem QS . Est autem vis mediocris QN vel QS , qua corpus retinetur in orbe suo circum Q , ad vim qua corpus P retinetur in Orbe suo circum S , in ratione composita ex ratione radii QS ad radium PS , & ratione duplicata temporis periodici corporis P circum S ad tempus periodicum corporis S circum Q . Et ex æquo, vis mediocris LM , ad vim qua corpus P retinetur in Orbe suo circum S (quæve corpus idem P eodem tempore periodico circum punctum quodvis immobile S ad distantiam PS revolvitur) est in ratione illa duplicata periodicorum temporum. Datis igitur temporibus periodicis una cum distantia PS , datur vis mediocris LM , & ea data datur etiam vis MN quamproxime per analogiam linearum PS , MN .

Corol 18. Iisdem legibus quibus corpus P circum corpus S revolvitur, fingamus corpora plura fluida circum idem S ad æquales ab ipso distantias moveri deinde ex his contrariis factis conflata annulum fluidum, rotundum ac corpori S concentricum, & singule annuli partes, motus suos omnes ad legem corporis P peragendo, propius accedent ad corpus S , & celerius movebuntur in Coniunctione & Oppositione ipsarum & corporis Q , quam in Quadraturis. Et Nodi annuli huius seu interseccionis ejus cum plano Orbis corporis Q vel S , qui sunt in Syzygiis, extra Syzygias vero movebuntur in antecedentia, & velocissime quidem in Quadraturis, tardius alii in locis. Annuli quoq; inclinatio com-

variabitur, & axis ejus singulis revolutionibus oscillabitur, completaq; revolutione ad pristinum situm redibit, nisi quatenus per præcessionem Nodorum circumfertur.

Corol. 19. Fungas jam globum corporis *S* ex materia non fluida constantem ampliari & extendi usq; ad hunc annulum, & alveo per circuitum excavato continere Aquam, motuq; eodem periodico circa axem suum uniformiter revolvi. Hic liquor per vices acceleratus & retardatus (ut in superiore Lemmate) in Syzygiis velocior erit, in Quadraturis tardior quam superficies Globi, & sic fluat in alveo refluxuq; ad modum Maris. Aqua revolvendo circa Globi centrum quærens, si tollatur attractio *Q*, nullum acquireret motum fluxu, & refluxu. Patet ratio Globi uniformiter progredientis in directum & interea revolventis circa centrum suum (per Lemma Corol. 5) ut & Globi de curvâ rectilineo uniformiter tracti (per Lemma Corol. 6.) Accedat autem corpus *Q*, & ab ipsius inæquali attractione mox turbabitur Aqua. Frenum major erit attractio aquæ propioris, minor ea remotioris. Vis autem *LM* trahet aquam deorsum in Quadraturis, facietq; ipsam descendere usq; ad Syzygias, & vis *KL* trahet eandem sursum in Syzygiis, sistetq; descensum ejus & faciet ipsam ascendere usq; ad Quadraturas.

Corol. 20. Si annulus jam rigeat & minuatur Globus, cessabit motus fluendi & ref luendi, sed Oscillatorius ille inclinationis motus & præcessio Nodorum manebunt. Habeat Globus eundem axem cum annulo, & totq; compleat eundem revolutibus, & superficie sua continet ipsum interius, exi inhaereat, & participando motum ejus compages utriusq; Oscillabitur & Nodi retrocedentur. Nam Globus, ut mox dicitur, ad suspendendas impressilines omnes indifferens est. Annulus Globi orbem maximus inclinationis annulus est ubi Nodi sunt in Syzygiis. Itac in progressu Nodorum ad Quadraturas conatur is inclinationem in se annu-
movere, & isto conatu motum reprimit Globo tot. R. trahit
Globus motum impressam usq; dum annulus conatu contrario

motum hunc tollat, imprimatq, motum novum in contrariam partem. Atq, hac ratione maximus decreſcentis inclinationis motus ſit in Quadraturis Nodorum, & minimus inclinationis angulus in Oſtantibus poſt Quadraturas, dein maximus reſtinationis motus in Syzygis & maximus angulus in Oſtantibus proxima. Et eadem eſt ratio Globi annulo nudati, qui in regionibus æquatoris vel altior eſt paulo quam juxta polos, vel conſtat ex materia paulo denſiore. Supplet enim vicem annuli iſte mater in æquatoris regionibus exceſſus. Et quanquam, aucta utriusq, Globi lapſus vi centripeta, tendere ſupponantur omnes ejus partes deorſum, ad modum gravitantium partium telluris, tamen Phænomena hujus & præcedentis Corollarii vix inde notabuntur.

Corol. 21. Eadem ratione qua materia Globi juxta æquatorem redundans efficit ut Nodi repreduantur, atq, adeo per hanc incrementum augetur iſte regressus, per diminutionem vero diminuitur & per ablationem tollitur, ſi materia pluſquam redundans tollatur, hoc eſt, ſi Globus juxta æquatorem vel depreſſior reddatur vel rarior quam juxta polos, oriatur motus Nodorum in conſequentia.

Corol. 22. Et inde vaſiliſſimè ex motu Nodorum innoteſcit conſtitutio Globi. Nimirum ſi Globus polos eodem conſtante ſervat & motus ſit in antecedentia, materia juxta æquatorem redundat ſi in conſequentia, deſcit. Pone Globum uniformem & perſectè circinatum in ſpatio liberis primo quieſcere, dein impetu quocunq, oblique in ſuperficiem ſuam facto propelli, & motum inde coarctare partim circulare, partim in directum. Quoniam Globus iſte ad axem omnes per centrum ſuum tranſeuntes indiſtinctè ſe habet, neq, propenſior eſt in unam axem, unamve a ſe ſitum, quam in aliam quævis, perſpicuum eſt quod is axem ſuum axiſq, inclinationem vi propria nunquam mutabit. Impellatur jam Globus oblique in eadem illa ſuperficièi parte quæ prius, impulſu quocunq, novo, & cum citior vel ſenior impulſus effectum nil mutet, maniſeſtum eſt quod hi duo impulſus

sue successive impressi eundem producent motum ac si simul impressi fuissent, hoc est eundem ac si Globus vi simplici ex utroque, (per Legum Corol 2) composita impulsu fuisset, atque adeo simplicem, circa axem inclinatione datum. Et par est ratio impulsus secundi tacti in locum alium quemvis in aequatore motus primi, ut & impulsus primi tacti in locum quemvis in aequatore motus, quem impulsus secundus ab ipso primo generaret, atque adeo impulsuum amborum factorum in loca quaecumque: Generabunt hi eundem motum circulaem ac si simul & semel in locum intersectionis aequatorum motuum illorum, quos seorsim generarent, fuissent impressi. Globus igitur homogeneus & perfectus non retinet motus plures distinctos, sed impressos omnes componit & ad unum reducit, & quatenus in se est, gyratur semper motu simplici & uniformi circa axem unicuique inclinatione semper invariabili datum. Sed nec vis centripeta inclinationem axis, aut rotationis velocitatem mutare potest. Si Globus plano quocumque, per centrum suum & centrum in quod vis dirigitur transeunte dividi intelligatur in duo hemisphaeria, urgebit semper vis illa utrumque hemisphaerium aequaliter, & propterea Globum quoad motum rotationis nullam in partem inclinabit. Addatur vero applicabi inter polum & aequatorem materia nova in formam montis cumulata, & hac, perpetuo conatu recedendi a centro sui motus, turbabit motum Globi, facietque polos ejus errare per ipsius superficiem, & circulos circum se punctumque sibi oppositum perpetuo describere. Neque corrigetur ista vagationis enormitas, nisi locando montem illum vel in polo alterutro, quo in Cata, per Corol 21, Nodi aequatoris progredientur, vel in aequatore, quatione, per Corol 20, Nodi regredientur, vel denique ex altera axis parte addendo materiam novam, qua mons inter movendum liberetur & hoc pacto Nodi vel progredientur, vel recedent, perinde ut mons & haec nova materia sunt vel polo vel aequatori propriores.

Prop. LXVII. Theor. XXVII.

Positis usdem attractionum legibus, dico quod corpus externum Q, circa interiorum P, S commune Gravitatis centrum C, radius ad centrum illud ductis, describit areas temporibus magis proportionales & Orbem ad formam Ellipseos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, quam circa corpus intimum & maximum S, radius a. l. ipsum ductis, describere potest.

Nam corporis Q attractiones versus S & P componunt ipsas attractionem absolutam, quæ magis dicitur in corporum S & P commune gravitatis centrum C, quam in corpus maximum S, quæq, quadrato distantie QC magis est proportionalis reciproce, quam quadrato distantie QS: ut rem perpendenti facile constabit.

Prop. LXVIII. Theor. XXVIII.

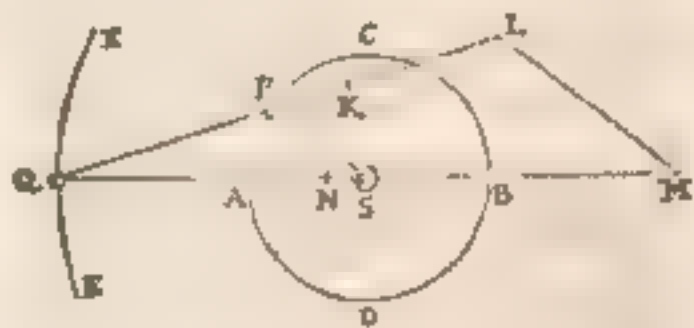
Positis usdem attractionum legibus, dico quod corpus externum Q circa interiorum P & S commune gravitatis centrum C, radius ad centrum illud ductis, describit areas temporibus magis proportionales, & Orbem ad formam Ellipseos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, si corpus intimum & maximum his attractionibus perinde atq, cætera agitur, quam si id vel non attractum quiescat, vel multo magis aut multo minus attractum aut multo magis aut multo minus agitur.

Demonstratur eodem scire modo cum Prop. LXVI, sed argumento prolixiore, quod ideo prætereo. Suffecerit rem sic asserere. Ex demonstratione Propositionis novissimæ liquet centrum in quod corpus Q conjunctis viribus urgetur, proximum esse communi centro gravitatis illorum duorum. Si coincideret hoc centrum cum centro illo communi, & quiesceret commune centrum gravitatis corporum trium; describerent corpus Q ex ur-

na parte, & commune centrum aliorum di orum ex altera parte, circa commune omnium centrum quiescat, & tales accuratas. Liqueat hoc per Corollarium in eadem Propositione LVIII. collatum cum demonstratis in Prop. LXIV & LXV. Perturbatur iste motus Ellipticus aliquantulum per distantiam centri duorum a centro in quod tertium *Q* attrahitur. Detur præterea motus communi trium centro, & augebitur perturbatio. Proinde minima est perturbatio, ubi commune trium centrum quiescit, hoc est ubi corpus intimum & maximum *S* lege cæterorum attrahitur: sitq; major semper ubi trium commune illud centrum, minuendo motum corporis *S*, moveri incipit & magis deinceps magisq; agitur.

Corol. Et hinc si corpora plura minora revolvantur circa maximum, colligere licet

quod Orbites descriptæ propius accedent ad Ellipticas, & arearum descriptiones fient magis æquabiles, si corpora omnia vicibus acceleratricibus, quæ



sunt ut eorum vires absolute directe & quadrata distantiarum inverse, se mutuo trahent agentq;, & Orbites easq; umbilicus collocetur in communi centro gravitatis corporum omnium interiorum (nimirum umbilicus Orbite primæ & intimæ in centro gravitatis corporis maximæ & intimæ, ille Orbite secundæ, in communi centro gravitatis corporum duorum intimorum, iste tertiæ, in communi centro gravitatis trium interiorum & sic deinceps) quam si corpus intimum quiescat & statuatur communis umbilicus orbitarum Omnium.

Prop.

Prop. LXIX. Theor. XXIX.

In Systemate corporum plurimum A, B, C, D &c. si corpus aliquod A trahit cetera omnia B, C, D &c. viribus acceleratricibus quæ sunt reciproce ut quadrata distantiarum a trahente, & corpus aliud B trahit etiam cetera A, C, D &c. viribus quæ sunt reciproce ut quadrata distantiarum a trahente. erunt absolutæ corporum trahentium A, B vires ad invicem, ut sunt ipsa corpora A, B , quarum sunt vires.

Nam attractiones acceleratrices corporum omnium B, C, D versus A , paribus distantis, sibi invicem æquantur ex hypothesi, & similiter attractiones acceleratrices corporum omnium versus B , paribus distantis, sibi invicem æquantur. Est autem absoluta vis attractiva corporis A ad vim absolutam attractivam corporis B , ut attractio acceleratrix corporum omnium versus A ad attractionem acceleratricem corporum omnium versus B , paribus distantis, & ita est attractio acceleratrix corporis B versus A , ad attractionem acceleratricem corporis A versus B . Sed attractio acceleratrix corporis B versus A est ad attractionem acceleratricem corporis A versus B , ut massa corporis A ad massam corporis B , propterea quod vires motrices, quæ (per Demonstrationem secundam, septimam & octavam) ex viribus acceleratricibus in corpora attracta ductis oriuntur, sunt (per motus Legem tertiam) sibi invicem æquales. Ergo absoluta vis attractiva corporis A est ad absolutam vim attractivam corporis B , ut massa corporis A ad massam corporis B . Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si singula Systematis corpora A, B, C, D , &c. scorsim spectata trahant cetera omnia viribus acceleratricibus quæ sunt reciproce ut Quadrata distantiarum a trahente; erunt corporum illorum omnium vires absolutæ ad invicem ut sunt ipsa corpora.

Corol. 2. Eodem argumento, si singula Systematis corpora *A, B, C, D* &c. seorsim spectata trahant cetera omnia viribus acceleratricibus quæ sunt vel reciproce vel directe in ratione dignitatis cuiuscunque distantiarum a trahente, quæve secundum legem quancunque, commanem ex distantis ab unoquoque, trahente desumuntur, constat quod corporum illorum vires absolutæ sunt ut corpora.

Corol. 3. In Systemate corporum, quorum vires decreverunt in ratione duplicata distantiarum, si minora circa maximum in Ellipsis umbilicam communem in maximi illius centro habentibus quam fieri potest accuratissimis revolvantur, & radii ad maximum illud ductis describant areas temporibus quam maxime proportionales: erunt corporum illorum vires absolutæ ad invicem, aut accurate aut quamproxime in ratione corporum; & contra. Patet per *Corol. Prop. LXVIII.* collatum cum hujus *Corol. 1.*

Scholium

His Propositionibus manuducimur ad analogiam inter vires centripetas & corpora centralia, ad quæ vires illæ dirigi solent. Rationi enim contentaneum est, ut vires quæ ad corpora diriguntur pendeant ab eorundem natura & quantitate, ut sit in Magneticis. Et quoties hujusmodi casus incidunt, æstimandæ erunt corporum attractiones, assignando singulis eorum particulis vires proprias, & colligendo summas virium. Vocem attractionis hic generaliter usurpo pro corporum conatu quocunque, accedendi ad invicem, siue conatus iste fiat ab actione corporum vel se mutuo petentium, vel per spiritus emissos se invicem agitantium, siue is ab actione Ætheris aut Aeris medave cuiuscunque, seu corporei seu incorporei oriatur corpora innata in se invicem utcumque, impellentis. Eodem sensu generali usurpo vocem impulsus, non species virium & qualitates physicas, sed quantitates & proportionales Mathematicas in hoc Tractatu expendens. ut in Desi-

nitionibus explicui. In Mathesi investigandæ sunt virium quantitates & rationes illæ, quæ ex conditionibus quibuscunq, positis consequentur: deinde ubi in Physicam descenditur, conferendæ sunt hæ rationes cum Phænomenis, ut innotescat quænam virium conditiones singulis corporum attractivorum generibus competant. Et tum demum de virium speciebus, causis & rationibus physicis tutius disputare licebit. Videamus igitur quibus viribus corpora Sphærica, ex particulis modo jam exposito attractivis constantia, debeant in se mutuo agere, & quales motus inde consequantur.

S E C T. XII.

De Corporum Sphæricorum Viribus attractivis.

Prop. LXX. Theor. XXX

Si ad Sphæræ superficier puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrescemes in duplicata ratione distantiarum a punctis, dico quod corpusculum intra superficiem constitutum his viribus nullam in partem attrahitur.

Sit HIL superficies illa Sphærica, & P corpusculum ius constitutum. Per P agantur ad hanc superficiem lineæ duæ HK , IL , arcus quam minimos HI , KL intercipientes, & ob triangula HPI , LPK (per Corol. 3. Lem. VII) similia, arcus illi erunt distantis HP , LP proportionales, & superficier Sphæricæ particulæ quavis, ad HI & KL rectis per punctum P transcurrentibus undiq, terminatæ, erunt in duplicata illa ratione. Ergo vires harum

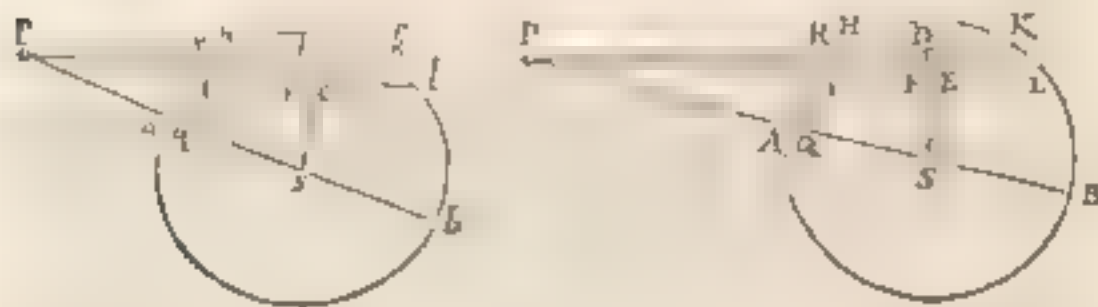
harum particularum in corpus P exercitæ sunt inter se æquales. Sunt enim ut particulæ directe & quadrata distantiarum inverse. Et hæc duæ rationes componunt rationem æqualitatis. Attractiones igitur in contrarias partes æqualiter factæ se mutuo destruunt. Et simili argumento attractiones omnes per totam Sphæricam superficiem a contrariis attractionibus destruuntur. Proinde corpus P nullam in partem his attractionibus impellitur. Q. E. D.



Prop. LXXI. Theor XXXI.

Isdem positis, dico quod corpusculum extra Sphæricam superficiem constitutum attrahitur ad centrum Sphære, vi reciproce proportionali quadrato distantie sue ab eodem centro.

Sunt AHB , ahb æquales duæ superficies Sphæricæ, centris S , s , diametris AB , ab descriptæ, & P , p corpuscula sita extrinsecus in diametris illis productis. Agantur a corpusculis lineæ



PHK , PIL , pbk , pil , auferentes a circulis maximis AHB , ahb , æquales arcus quam minimos HK , bk & HL , bl : Et ad eas demittantur perpendiculara SD , sd , SE , se ; IR , ir ; quorum

Bb SD ,

$\frac{p f \times P F \times P S}{p f}$, hoc est ut $p f$ quad. ad $P S$ quad. Et simili argu-

mento vires, quibus superficies convolutione arcuum $K L$, & $l l$ descriptæ trahunt corpuscula, erunt ut $p f$ quad. ad $P S$ quad., in-
q, eadem ratione erunt vires superficierum omnium circularium in quas utraq, superficies Sphærica, capiendo semper $s d = S D$ & $s e = S E$, distingui potest. Et per Compositionem, vires totarum superficierum Sphæricarum in corpuscula exercitæ erunt in eadem, ratione. *Q. E. D.*

Prop. LXXII. Theor. XXXII.

Si ad Sphæræ cupiscent puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrescentes in duplicata ratione distantiarum a punctis, ac datur ratio diametri Sphæræ ad distantiam corpusculi a centro ejus, dico quod vis qua corpusculum attrahitur proportionalis erit semi diametro Sphæræ.

Nam concipe corpuscula duo seorsim a Sphæris duabus attrahi, & distantias a centrīs proportionales esse diametris, Sphæras autem resolvi in particulas similes & similiter positas ad corpuscula. Hinc attractiones corpusculi unius, factæ versus singulas particulas Sphæræ unius, erunt ad attractiones alterius versus analogas totidem particulas Sphæræ alterius, in ratione composita ex ratione particularum directæ & ratione duplicata distantiarum inversæ. Sed particule sunt ut Sphæræ, hoc est in ratione triplicata diametrorum, & distantie sunt ut diametri, & ratio prior directæ una cum ratione posteriore his inversæ est ratio diametri ad diametrum. *Q. E. D.*

Corol. 1 Hinc si corpuscula in circulis circa Sphæras ex materia æqualiter attractiva constantes revolvantur, sintq, distantie a centrīs Sphærarum proportionales earundem diametris, tempora periodica erunt æqualia.

Corol. 2. Et vice versa, si tempora periodica sunt æqualia, distantia erunt proportionales diametris. Constant hæc duo per Corol. 3. Theor. IV.

Prop. LXXIII. Theor. XXXIII.

Si ad sphaeræ alienius datæ puncta singula tendant æquales vires centripetæ & decrecentes in duplicata ratione distantiarum a punctis dico quod corpusculum intra sphaeram constitutum attrahitur vi proportionali distantia suæ ab ipsius centro.

In Sphæra $A B C D$, centro S descripta, locetur corpusculum P & centro eodem S intervallo SP concipe Sphæram internam $P E Q F$ describi. Manifestum est, per Theor. XXX. quod Sphæricæ superficiei concentricæ, ex quibus Sphærarum differentia $A E B F$ componitur, attractionibus per attractiones contrarias destructis, nil agunt in corpus P . Restat sola attractio Sphære interioris $P E Q F$. Et per Theor. XXXII. hæc est ut distantia PS . Q . E . D .



Scholium.

Superficies ex quibus solida componuntur, hic non sunt pure Mathematicæ, sed Orbis adeo tenues ut eorum crassitudo instar nihili sit. nimirum Orbis evanescentes ex quibus Sphæra ultimo constat, ubi Orbium illorum numerus augetur & crassitudo minuitur ad infinitum, iuxta Methodum sub initio in Lemmatis generalibus expositam. Similiter per puncta, ex quibus lineæ, superficies & solida componi dicuntur, intelligenda sunt particule æquales magnitudinis continentia.

Prop.

Prop. LXXIV. Theor. XXXIV.

Isdem positis, dico quod corpusculum extra Spharam constitutum attrahitur vi reciproce proportionali quadrato distantie suae ab ipsius centro.

Nam distinguatur Sphæra in superficies Sphæricas innumeras concentricas, & attractiones corpusculi a singulis superficiibus orundæ erunt reciproce proportionales quadrato distantie corpusculi a centro, per Theor. XXXI. Et componendo, fiet summa attractionum hoc est attractio Sphærae totius, in eadem ratione. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc in equalibus distantis a centro homogenearum Sphærarum, attractiones sunt ut Sphærae. Nam per Theor. XXXII. si distantie sunt proportionales diametris Sphærarum, vires erunt ut diamet. 1. Mutata distantia maior in illa ratione, & distantis par tactis equalibus, augebitur attractio in duplicata illa ratione, adeoq. erit ad attractionem alteram in triplicata illa ratione, hoc est in ratione Sphærarum.

Corol. 2. In distantis quibuscumque attractiones sunt ut Sphærae applicatae ad quadrata distantiarum.

Corol. 3. Si corpusculum extra Sphæram homogeneam positum trahatur vi reciproce proportionali quadrato distantie suae ab ipsius centro, constet autem Sphæra ex particulis attractivis, decreset vis particulæ cuiusq. in duplicata ratione distantie a particula.

Prop. LXXV. Theor. XXXV.

Si ad Sphærae datæ puncta singula tendunt vires æquales centripetæ decrecentes in duplicata ratione distantiarum a punctis, dico quod Sphæra quævis alia similis attrahitur vi reciproce proportionali quadrato distantie centrorum.

Nam particulæ cuiuscumque attractio est reciproce ut quadratum distantie ejus a centro Sphærae trahentis, (per Theor. XXXI.) & prop-

propterea eadem est ac si vis tota attrahens maneret de corpusculo unico sito in centro hujus Sphæræ. Hæc autem attractio tanta est quanta foret vicissim attractio corpusculi ejusdem, si modo illud a singulis Sphæræ attractæ particulis eadem vi traheretur qua ipsas attrahit. Foret autem illa corpusculi attractio (per Theor XXXIV) reciproce proportionalis quadrato distantie ejus a centro Sphæræ, adeoq. huic æqualis attractio Sphæræ est in eadem ratione. Q. E. D.

Corol. 1. Attractiones Sphærarum, versùs alias Sphæras homogeneas, sunt ut Sphæræ trahentes applicatæ ad quadrata distantiarum centrorum suorum a centris earum quas attrahunt.

Corol. 2. Idem valet ubi Sphæra attracta etiam attrahit. Namq. hujus puncta singula trahent singula alterius, eadem vi qua ab ipsis vicissim trahuntur, adeoq. cum in omni attractione urgeatur (per Legem 3.) tam punctum attrahens, quam punctum attractum, geminabitur vis attractionis mutua, conservatis proportionibus.

Corol. 3. Eadem omnia, quæ superius de motu corporum circa umbilicum Conicarum Sectionum demonstrata sunt, obtinent ubi Sphæra attrahens locatur in umbilico & corpora moventur extra Sphæram.

Corol. 4. Ea vero quæ de motu corporum circa centrum Conicarum Sectionum demonstrantur, obtinent ubi motus peraguntur intra Sphæram.

Prop. LXXVI. Theor. XXXVI.

Si Sphæra in progressu a centro ad circumferentiam (quod materia densitatem & vim attrahentem) utriusq. dissimilaret, in progressu vero per circumferentiam ad datam omnem a centro distantiam sunt undiq. similes, & vis attrahens a puncto cuiusq. decrescit in duplicata ratione distantie corporis attrahentis dico quod vis tota qua lussimodi Sphæra una attrahit aliam sit reciproce proportionalis quadrato distantie centrorum.

Sunto

Sunto Sphæræ quocunq; concentricæ & similes *AB*, *CD*, *EF* &c. quarum interiores additæ exterioribus component materiam densiorem versus centrum, vel subductæ relinquant tenuiorem; & hæc, per Theor. XXXV, trahent Sphæræ alias quocunq; concentricas similes *GH*, *IK*, *LM*, &c. singulæ singulæ, viribus reciproce proportionalibus quadrato distantie *SP*. Et componendo vel dividendo, summa virium illarum omnium, vel excessus aliquarum supra alias, hoc est, vis qua Sphæra tota ex concentricis quibuscunq; vel concentricarum differentis composita *AB*, trahit totam ex concentricis quibuscunq; vel concentricarum differen-

tis compositam *GH*, erit in eadem ratione. Augetur numerus Sphærarum concentricarum in infinitum sic,



ut materię densitas una cum vi attractiva, in progressu a circumferentia ad centrum, secundum Legem quancunq; crescat vel decreseat. & addita materia non attractiva complatur ubi densitas deficiens, eo ut Sphæræ acquirant formam quamvis optatam, & vis qua harum una attrahet alteram erit etiamnum (per argumentum superius) in eadem illa distantia quadrata ratione inversa. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si eorummodi Sphæræ complures sibi invicem per omnia similes se mutuo trahant, attractiones acceleratrices singularum in singulas erunt in æqualibus quibusvis centrorum distantis ut Sphæræ attrahentes.

Corol. 2. Inq; distantis quibusvis inæqualibus, ut Sphæræ attrahentes applicatæ ad quadrata distantiarum inter centra.

Corol.

Corol. 3. Attractiones vero motrices, seu pondera Sphærarum in Sphæras erunt, in æqualibus centrorum distantis, ut Sphære attrahentes & attractæ conjunctim, id est, ut contenta sub Sphæris per multiplicationem producta.

Corol. 4. Inq, distantis inæqualibus, ut contenta illa applicata ad quadrata distantiarum inter centra.

Corol. 5. Eadem valent ubi attractio oritur a Sphæra utriusq, virtute attractiva, mutuo exercita in Sphæram alteram. Nam viribus ambabus geminatur attractio, proportionē servata.

Corol. 6. Si hujusmodi Sphære aliquæ circa alias quiescentes revolvantur, singulæ circa singulas, sintq, distantie inter centra revolventium & quiescentium proportionales quadratorum diametris, æqualia erunt tempora periodica.

Corol. 7. Et vicissim, si tempora periodica sunt æqualia, distantie erunt proportionales diametris.

Corol. 8. Eadem omnia, quæ superius de motu corporum circa umbilicos Conicarum Sectionum demonstrata sunt, obtinent ubi Sphæra attrahens, formæ & conditionis cujuscvis jam descriptæ, locatur in umbilico.

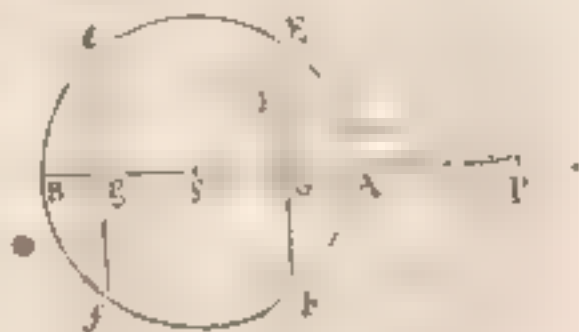
Corol. 9. Ut & ubi gyrationia sunt etiam Sphære attrahentes, conditionis cujuscvis jam descriptæ.

Prop. LXXVII. Theor. XXXVII.

Si ad singula Sphærarum puncta tendant vires centripetæ proportionales distantis punctorum a corporibus attractis: dico quod vis composita, quæ Sphærae duæ se invicem trahent, est ut distantia inter centra Sphærarum.

Cas 1. Sit $ACBD$ Sphæra, S centrum ejus, P corpusculum attractum, $PASB$ axis Sphære per centrum corpusculi trai siens, EF , et plana duo quibus Sphæra secatur, hunc axi perpendicularia, & hinc inde æqualiter distantia a centro Sphære, G intersectiones planorum & axis, & H punctum quodvis in plano EF .
Puncti

Puncti H vis centripeta in corpusculum P secundum lineam PH exercita est ut distantia PH , & (per Legum Corol. 2) secundum lineam PG , seu versus centrum S , ut longitudo PG . Igitur punctorum omnium in plano EF , hoc est plani totius vis, qua corpusculum P trahitur versus centrum S , est ut numerus punctorum ductus in distantiam PG : id est ut contentum sub plano ipso EF & distantia illa PG . Et similiter vis plani ef , qua corpusculum P trahitur versus centrum S , est ut planum illud ductum in distantiam suam Pg , sive ut hinc aequali planum EF ductum in distantiam illam Pg , & summa virium partium utiq; ut planum EF ductum in summam distantiarum $PG + Pg$, id est, ut planum illud ductum in duplam centri & corpusculi distantiam PS , hoc est, ut duplum planum EF ductum in distantiam PS , vel ut summa aequalium planorum $EF + ef$ ducta in distantiam



candem. Et simili argumento, vires omnium planorum in Sphaera tota, hinc inde aequaliter a centro Sphaerae distantium, sunt ut summa planorum ducta in distantiam PS , hoc est, ut Sphaera tota ducta in distantiam centri sui a corpusculo P . Q. E. D.

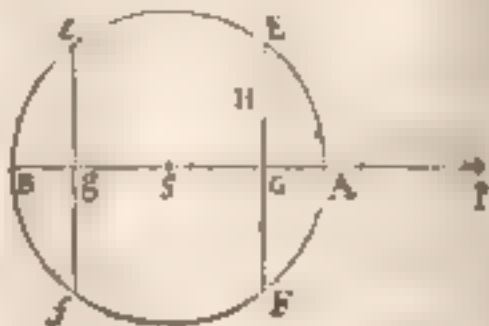
Cas. 2. Trahat jam corpusculum P Sphaeram $ACBD$. Et eodem argumento probabitur quod vis, qua Sphaera illa trahitur, erit ut distantia PS . Q. E. D.

Cas. 3. Componatur jam Sphaera altera ex corpusculis innumeris P , & quoniam vis, qua corpusculum unumquodq; trahitur, est ut distantia corpusculi a centro Sphaerae primae ducta in Sphaeram eandem, atq; adeo eadem est ac si prodiret tota de corpusculo unico in centro Sphaerae, vis tota qua corpuscula omnia in Sphaera secunda trahuntur, hoc est, qua Sphaera illa tota trahitur, eadem erit ac si Sphaera illa traheretur vi procedente de corpusculo

et loquico in centro Sphæræ primæ, & propterea proportionalis est distantie inter centra Sphærarum. Q. E. D.

Cas. 4. Trahant Sphæræ se mutuo, & vis geminata proportionem priorem servabit. Q. E. D.

Cas. 5. Locetur jam corpusculum p intra Sphæram $ACBD$, & quoniam vis plani ef in corpusculum m est ut contentum sub plano illo & distantia pg , & vis contraria plani EF ut contentum sub plano illo & distantia pG , erit vis ex utraq. composita ut differentia contentorum, hoc est, ut summa equalium planorum ducta in semissem differentie distantiarum, id est, ut summa illa ducta in pS , distantiam corpusculi a centro Sphæræ. Et simili argumento attractio planorum omnium EF , & ef in Sphæra tota, hoc est attractio Sphæræ totius, est ut summa planorum omnium, seu Sphæra tota, ducta in pS distantiam corpusculi a centro Sphæræ. Q. E. D.



Cas. 6. Et si ex corpusculis innumeris p componatur Sphæra nova intra Sphæram priorem $ACBD$ sita, probabitur ut prius, quod attractio, sive simplex Sphæræ unius in alteram, sive mutua utriusq. in se invicem, erit ut distantia centrorum pS . Q. E. D.

Prop. LXXVIII. Theor. XXXVIII.

Si Sphæræ in progressu a centro ad circumferentiam sint utcumq. dissimiles & inæquales, in progressu vero per circumum ad datam omnem a centro distantiam sint undiq. similes, & vis attractiva puncti cuiusq. sit ut distantia corporis attracti dico quod vis tota per huiusmodi Sphæræ dux se mutuo trahunt sit proportionalis distantie inter centra Sphærarum.

Demonstratur ex Propositione precedente, eodem modo quo Proposition LXXVII. ex Propositione LXXV. demonstrata fuit.

Corol. Quæ superius in Propositionibus X. & LXIV. de motu corporum circa centra Conicarum Sectionum demonstrata sunt, valent ubi attractiones omnes sunt vi Corporum Sphæricorum, conditionis jam descriptæ, suntq; corpora attracta Sphære conditionis ejusdem.

Scholium.

Attractionum Casus duos insigniores jam dedi expolitos, nimirum ubi vires centripetæ decreverunt in duplicata distantiarum ratione, vel crescunt in distantiarum ratione simplici, efficientes in utroq; Casu ut corpora gyrentur in Conicis Sectionibus, & componentes corporum Sphæricorum vires centripetas eadem lege in recessu a centro decreverunt vel crescentes cum ipsis. Quod est notatu dignum. Casus ceteros, qui conclusiones minus elegantes exhibent, sigillatim percurrere longum esset: Malim cunctos methodo generali simul comprehendere ac determinare, ut sequitur.

Lemma XXIX.

Si describantur centro *S* circulus quilibet *AEB*, (Vide Fig. Prop. sequentis) & centro *P* circuli duo *EF*, *ef*, secantes priorem in *E*, *e*, lineamq; *PS* in *F*, *f*, & ad *PS* demittantur perpendicularia *ED*, *ed* dico quod si distantia arcuum *EF*, *ef* in infinitum minus intelligatur, ratio ultima lineæ evanescentis *Dd* ad lineam evanescentem *I f* eo sit, quæ lineæ *PE* ad lineam *PS*.

Nam si lineæ *Pe* secet arcum *EF* in *q*, & recta *Le*, quæ cum arcu evanescente *Le* coincidit, producta occurrat rectæ *PS* in *I*, & ab *S* demittatur in *Pe* normalis *SG*: ob similia triangula *EDI*, *edt*, *EDS*, erit *Dd* ad *Ee* ut *DI* ad *ET* seu *DE* ad

tem minor, in ratione PD ad PE , adeoque, ut $PD \times Dd$. Dividi jam intelligatur linea DE in particulas innumeras æquales, quæ singulae nominentur Dd , & superficies FE dividatur in totidem æquales annulos, quorum vires erunt ut summa omnium $PD \times Dd$, hoc est, cum lineolæ omnes Dd sibi invicem æquantur, adeoque, pro datis haberi possint, ut summa omnium PD ducta in Dd , id est, ut $PFq.$ —, $PDq.$ sive, $PEq.$ —, $PDq.$ vel $DLq.$ ductum in Dd , hoc est, si negligatur data, Dd , ut DL quad. Ducatur jam superficies FE in altitudinem Ff , & fiet solidi $EFfe$ vis exercita in corpusculum P ut $DEq. \times Ff$ puta si detur vis quam particula aliqua data Ff in distantia PE exercet in corpusculum P . At si vis illa non detur, fiet vis solidi $EFfe$ ut solidum $DEq. \times Ff$ & vis illa non data conjunctum. Q. E. D.

Prop. LXXX. Theor. XL

Si ad Sphæræ alienius ALB , centro S descriptæ, particulas singulas æquales tendant æquales vires centripetæ, & ad Sphæræ axem AB , in quo corpusculum aliquod P locatur, erigantur de punctis singulis D perpendiculara DE , Sphæræ occurrentia in E , & in ipsis capiantur longitudines DN quæ sunt ut quantitas $\frac{DEq. \times PS}{PF}$ & vis quam

Sphæræ particula sita in axe ad distantiam PE exercet in corpusculum P conjunctum dico quod vis tota, quæ corpusculum P trahitur versus Sphæram, est in area comprehensa sub axe Sphæræ AB & linea curvæ ANB , quam punctum N perpetuo tangit.

Etenim stantibus quæ in Lemmate & Theoremate novissimo constructa sunt, concipe axem Sphæræ AB dividi in particulas innumeras æquales Dd , & Sphæram totam dividi in totidem laminas Sphæricas concavo-convexas $EFfe$, & erigatur perpendicularum dn . Per Theorema superius, vis qua lamina $EFfe$ trahit corpusculum P est ut $DEq. \times Ff$ & vis particulae unius ad distantiam PE vel PF exercita conjunctum. Est autem per Lem-

ma novissimum, Dd ad Ff ut PE ad PS , & inde Ff æqualis $\frac{PS \times Dd}{PE}$, & $DEq. \times Ff$ æquale Dd in $\frac{DEq. \times PS}{PE}$, & propterea vis laminæ $EFfe$ est ut Dd in $\frac{DEq. \times PS}{PE}$ & vis particulæ ad distantiam PF exercita conjunctum, hoc est (ex Hypothesi) ut $DN \times Dd$, seu area evanescens $DNnd$. Sunt igitur laminarum omnium vires in corpus P exercitæ, ut area omnes $DNnd$, hoc est Sphæræ vis tota ut area tota $ABNA$. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si vis centripeta ad particulas singulas tendens, eadem semper maneat in omnibus distantis, & fiat DN ut $\frac{DEq. \times PS}{PE}$, erit vis tota qua corpusculum a Sphæra attrahitur, ut area $ABNA$.

Corol. 2. Si particularum vis centripeta sit reciproce ut distantia corpusculi a se attracti, & fiat DN ut $\frac{DEq. \times PS}{PEq.}$; erit vis qua corpusculum P a Sphæra tota attrahitur ut area $ABNA$.

Corol. 3. Si particularum vis centripeta sit reciproce ut cubus distantie corpusculi a se attracti, & fiat DN ut $\frac{DEq. \times PS}{PEqq.}$; erit vis qua corpusculum a tota Sphæra attrahitur ut area $ABNA$.

Corol. 4. Et universaliter si vis centripeta ad singulas Sphæræ particulas tendens ponatur esse reciproce ut quantitas V , fiat autem DN ut $\frac{DEq. \times PS}{PE \times V}$; erit vis qua corpusculum a Sphæra tota attrahitur ut area $ABNA$.

Prop. LXXXI. Prob. XLI.

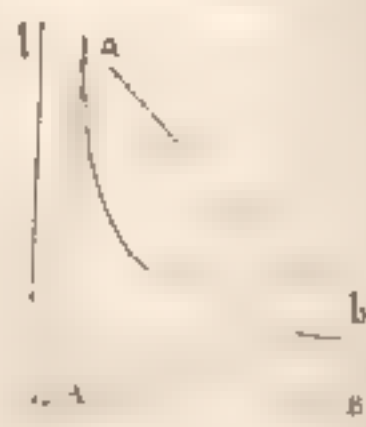
Stantibus jam positis, mensuranda est area ABNA.

A puncto P ducatur secunda PH Sphæram tangens in H , & ad axem PAB demissa Normali HI , bisecetur PI in L , & erit
(per

Pone DN æqualem duplo ejus $2SL - 1D - \frac{ALB}{LD}$: & ordinatæ

pars data $2SL$ ducta in longitudinem AB describet arcam rectangulam $2SL \times AB$, & pars indefinita LD ducta normaliter in eandem longitudinem per motum continuum, ea lege ut inter movendam crescendo vel decrecendo æquetur semper longitudini LD , describet arcam $\frac{LBq}{2} - \frac{1Aq}{2}$, id est, arcam $SL \times AB$;

quæ subducta de area priore $2SL \times AB$ relinquit aream $SL \times AB$. Pars autem tertia $\frac{ALB}{LD}$ ducta itidem per motum localem

normaliter in eandem longitudinem, describet arcam Hyperbolicam, quæ subducta de area $SL \times AB$ relinquet aream quasitam $ABNA$. Unde talis emergit Problematis constructio. Ad puncta L, A, B erige perpendiculara LI, Aa, Bb , quorum Aa ipsi LB , & Bb ipsi LA æque-


tur. Asymptotis LI, LB , per puncta a, b describatur Hyperbola ab . Et acta chorda ba claudet aream aba æ-
 reæ quasitæ $ABNA$ æqualem.

Exempl. 2 Si vis centripeta ad singulas Sphæræ particulas tendens sit reciproce ut cubus distantiar, vel (quod perinde est) ut cubus ille applicatus ad planum quodvis datum, scribe $\frac{PE cub.}{2ASq.}$ pro V ,
 dein $2PS \times LD$ pro P $q.$, & fiet DN ut $\frac{SL \times ASq.}{PS \times LD} - \frac{ASq.}{2PS}$
 $= \frac{ALB \times ASq.}{2PS \times LDq.}$ id est (ob continue proportionales PS, AS, SI) ut $\frac{LSI}{LD} - \frac{1}{2}SI - \frac{ALB \times SI}{2LDq.}$. Si ducantur hujus partes

tres in longitudinem AB , prima $\frac{L SI}{LD}$ generabit arcam Hyperbo-

licam, secunda $\frac{SI}{LD}$ aream $\frac{1}{2} AB \times SI$; tertia $\frac{ALB \times SI}{2LD}$ aream

$\frac{ALB \times SI}{2LA} - \frac{ALB \times SI}{2LB}$, id est, $AB \times SI$. De prima subducatur

summa secundæ ac tertiæ, & manebit area quadrata $ABNA$. Ubi talis emergit Problematum constructio. Ad puncta I, A, S, B erige perpendiculara Il, Aa, Ss, Bb , quorum Ss ipsi SI æquetur, perque punctum S Asymptotis Ll, Lb decubatur Hyperbola a, B occurrens perpendicularis Aa, Bb in a & b , & rectangulum $2ASl$ subductum de area Hyperbolica $Aa s b B$ relinquet aream quadratam $ABNA$.

Exempl. 3. Si Vis centripeta, ad foveas Sphæræ partem tendens, decreseat in quadruplicata ratione distantie a partem illa, scilicet $\frac{PL^3}{2AS^2}$ pro P , dem $\frac{2PS \times ID}{2PS \times ID}$ pro PL , & fiet DN et

$\frac{SI \times SI}{2 \times ID} - \frac{SI}{2 \times ID} - \frac{ALB \times SI^2}{2 \times 2 \times LD}$. Cuius tres partes ductæ in longitudinem AB , producent Arcas totidem, viz

$\frac{2 \times SI \times SI}{LA} - \frac{2 \times SI \times SI}{LB} - \frac{LB \times SI}{2} - \frac{LA \times SI^2}{2}$

& $\frac{ALB \times SI}{2 \times LA} - \frac{ALB \times SI}{2 \times LB}$. Et hæc post debitam reductionem,

subductis posterioribus de prioribus, evadant $\frac{8 SI cub.}{3 LI}$. Igitur

vis tota, qua corpusculum P in Sphæræ centrum trahitur, est ut

$\frac{SI cub.}{PI^3}$, id est reciprocè ut $PS, m. \times PI$. Q. E. I.

semidiametrum SA . Si vires illæ sunt reciproce in triplicata ratione distantiarum, attractiones in I & P erunt ad invicem ut SP quad. ad SA quad., si in quadruplicata, ut SP cub. ad SA cub. Unde cum attractio in P , in hoc ultimo casu, inventa fuit reciproce ut PS cub. $\times PI$, attractio in I erit reciproce ut SA cub. $\times PI$, id est (ob datum SA cub.) reciproce ut PI . Et similis est progressus in infinitum. Theorema vero sic demonstratur.

Stantibus jam ante constructis, & existente corpore in loco quovis P , ordinata applicata DN inventa fuit ut $\frac{DE^q \times PS}{PE \times PL}$.

Ergo si agatur IE , ordinata illa ad alium quemvis locum I , mutatis mutandis, evadet ut $\frac{DE^q \times IS}{IE \times PL}$. Pone vires centripetas, e

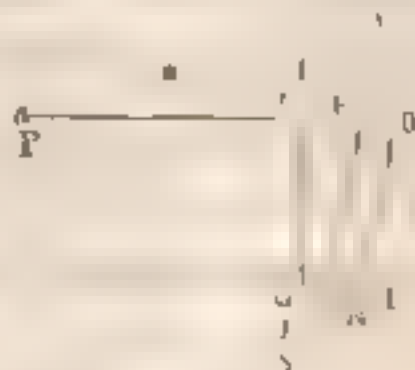
Sphære puncto quovis E manantes, esse ad invicem in distantis IE , PE , ut PE^n ad IE^n , (ubi numerus n designet indicem potestatum PE & IE) & ordinatæ illæ fient ut $\frac{PE^q \times PS}{PE \times PL^n}$

$\frac{DE^q \times IS}{IE \times IE^n}$, quarum ratio ad invicem est ut $PS \times IE \times IE^n$ ad $IS \times PE \times PE^n$. Quoniam ob similia triangula SPE , SEI , sit IL ad PL ut IS ad SE vel SA , pro ratione IE ad PE habet rationem IS ad SA , & ordinatarum ratio evadet $PS \times IE^n$ ad $SA \times PI^n$. Sed PS ad SA dimidiata est ratio distantiarum PS , SI , & IL^n ad PE^n dimidiata est ratio virium in distantis PS , IS . Ergo ordinatæ, & propterea arcæ quas ordinatæ describunt, hujus proportionales attractiones, sunt in ratione composita ex dimidiatis illis rationibus. Q. E. D.

Prop. LXXXIII. Prob. XLII.

Intensitas cum qua corpusculum in centro Sphaerae locatum ad ejus segmentum quodcumq; attrahitur.

Sit P corpus in centro Sphaerae, & RBS segmentum ejus plano RDS & superficie Sphaerica RBS contentum. Superficie Sphaerica EFG centro P descripta secetur DB in F , ac distinetur segmentum in parte $bKLECS$, $FLDG$. Sit autem superficies illa non pure Mathematica, sed Physica, profunditas in habens quam minimam. Nominetur ista profunditas O , & erit hae superficies (per demonstrata *Archimedis*) ut $PF \times DF \times O$. Ponamus praeterea vires attractivae particulam in sphaera esse reciproce ut distantiarum divinitas illa cujus Index est n ; & vi



qua a superficie FE trahit corpus P erit ut $\frac{DF \times O}{PF^n + 1}$. Hae proportionale sit perpendiculari IN ductam in O & area cylindrica $BPIH$, per unam ordinem applicata IN in longitudinem DB per motum compositionem descendi delectat, erit ut vi tota qua segmentum totam RBS trahit corpus P . Q.E.D.

Prop. LXXXIV. Prob. XLIII.

Intensitas cum qua corpusculum extra centrum Sphaerae in axe situm attrahitur ab eodem segmento.

A segmento EBR trahitur corpus P (vide *Prop. 79. 80. 81.*) in eum axe ADB locatum. Centro P intervallo PE des-

describatur superficies Sphaera $E F K$, qua distinguatur segmen-
tum in partes duas $E B K F$ & $E F A D$ Quatratur vis partis
prioris per Prop. LXXVI & vis partis posterioris per Prop.
LXXXIII, & summa visum erit vis segmanti totius $E B A D$.
Q. E. I.

Scholium

Explicatis attractionibus corporum Sphaericorum, iam perge-
re liceret ad leges attractionum aliorum quorundam ex parte
his attractivis similes constantium corporum, sed ista particula-
tum tractare minus ad naturam spectat. Sufficiunt Propositi-
ones quaedam generales de viribus ammodi corporum, de
motibus inde oriundis, ob eorum in rebus Philosophicis aliqua-
tem usum, subungere.

S E C T. XIII.

De Corporum etiam non Sphaericorum viribus attractivis.

Prop. LXXXV. Theor. XLII

*Si corporis attracti, ubi attrahenti contiguum est, attractio longe fortior
sit, quam cum vel minimo intervallo separantur ab invicem vires
particularum trahentis, in recessu corporis attrahenti, decreverint in ra-
tione plusquam duplicata distantiarum a particulis.*

Nam si vires decreverint in ratione duplicata distantiarum a
particulis, attractio verius corpus sphaericum, propterea quod
(per Prop. LXXIV.) de reciproce ut quadratum distantiae at-
trahenti

tracti corporis a centro Sphaerae, haud sensibilibiter augebitur ex contactu, atq; adhuc minus augebitur ex contactu, si attractio in recessu corporis attracti decreseat in ratione minore. Patet igitur Propositio de Sphaeris attractivis. Et par est ratio Orbium Sphaericorum concavorum corpora externa trahentium. Et multo magis res constat in Orbibus corpora interiora constituta trahentibus, cum attractiones passim per Orbium cavitates ab attractionibus contrariis (per Prop. LXX.) tollantur, ideoq; vel in ipso contactu nulle sint. Quod si Sphaeris huius Orbibusq; Sphaericis partes quolibet a loco contactus remotae auferantur, & partes novae ubique addantur, mutari possunt figurae horum corporum attractivorum pro lubitu, nec tamen partes additae vel subductae, cum sint a loco contactus remotae, augebunt notabiliter attractionis excessum qui ex contactu oritur. Constat igitur Propositio de corporibus figurarum omnium. Q. E. D.

Prop. LXXXVI. Theor. XLIII.

Si particularum, ex quibus corpus attractivum componitur, vires in recessu corporis attracti decrescunt in triplicati vel plusquam triplicata ratione distantiarum a particulis attractivis longe fortius erit in contactu, quam cum attrahens & attractum inter valle vel minimo separantur ab invicem.

Nam attractionem in accessu attracti corpusculi ad huiusmodi Sphaeram trahentem augeri in infinitum, constat per solutionem Problematis XLI. in Exemplo secundo ac tertio exhibitam. Idem, per Exempla illa & Theorema XLI inter se collata, facile colligitur de attractionibus corporum versus Orbes concavo-convexos, siue corpora attractiva collocentur extra Orbes, siue intra in eorum cavitatibus. Sed & addendo vel auferendo his Sphaeris & Orbibus novis extra locum contactus materiam quamlibet attractivam, eo ut corpora attractiva induant figuram quamvis asigatam, constabit Propositio de corporibus universis. Q. E. D.

Prop.

Prop. LXXXVII. Theor. XLIV.

Si corpora duo sibi invicem similis & ex materia equaliter attrahenda constantia seorsim attrahant corpuscula sibi ipsis proportionalia & ad se similiter posita attractiones acceleratrices corpusculorum in corpora tota erunt ut attractiones acceleratrices corpusculorum in eorum particulas totis proportionales & in totis similiter positas.

Nam si corpora distinguantur in particulas, quæ sint totis proportionales & in totis similiter sitæ, erit, ut attractio in particulam quamlibet unius corporis ad attractionem in particulam correspondentem in corpore altero, ita attractiones in particulas singulas primi corporis ad attractiones in alterius particulas singulas correspondentes, & componendo, ita attractio in totum primum corpus ad attractionem in totum secundum. Q. E. D.

Corol. 1. Ergo si vires attractivæ particularum, augendo distantias corpusculorum attractorum, decrevant in ratione dignitatis cuiusvis distantiarum attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut corpora directe & distantiarum dignitates illæ inverse. Ut si vires particularum dec. decant in ratione dupl. ita distantiarum a corpusculis attractis, corpora autem sint ut $A \text{ cub.}$ & $B \text{ cub.}$ ad id primum corporum latera cubica, tam corpusculorum attractorum distantia a corporibus, ut A & B attractiones acceleratrices in corpora erunt ut $\frac{A \text{ cub.}}{A \text{ quad.}}$ & $\frac{B \text{ cub.}}{B \text{ quad.}}$ id est, ut corporum latera illa cubica A & B . Si viræ particularum decrevant in ratione triplicata distantiarum a corpusculis attractis, attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut $\frac{A \text{ cub.}}{A \text{ cub.}}$ & $\frac{B \text{ cub.}}{B \text{ cub.}}$ id est æquales. Si vires decrevant in ratione quadruplicata, attractiones in corpora erunt ut $\frac{A \text{ cub.}}{A \text{ qq.}}$ & $\frac{B \text{ cub.}}{B \text{ qq.}}$ id est reciproce ut latera cubica A & B . Et sic in cæteris.

Corol.

Corol. 2. Unde vicissim, ex viribus quibus corpora similia trahunt corpuscula ad se similiter posita, colligi potest ratio decrementi virium particularium attractivarum in recessu corpusculi attracti, si modo decrementum illud sit directe vel inverse in ratione aliqua distantiarum.

Prop. LXXXVIII. Theor. XLV.

Si particularium & pluralium corporis cuiuscunque vires attractivæ & sint in distantia & locorum a particulis cuius corporis totius tendet ad ipsius centrum gravitatis, & eadem erit cum vi globi ex materia constituta & æquali constantis & centrum habentis in eius centro gravitatis.

Corporis *RSTI* particule *A*, B trahant corpusculum aliquod *Z* viribus quæ, si particule æquantur inter se, sint ut distantie *AZ*, *BZ*; si particule stantur inæquales, sint ut hæ particule in distantias suas *AZ*, *BZ* respective ductæ. Et exponantur hæ vires per contenta illa $A \times AZ$ & $B \times BZ$. Jungatur *AB*, & secetur ea in *G* ut sit *AG* ad *BG* ut particula *B* ad particulam *A*, & erit *G* commune centrum gravitatis particularium *A* & *B*. Vi $A \times AZ$ per Legum Corol. 2. resolvatur in vires $A \times GZ$ & $A \times AG$, & vires $B \times BZ$ in vires $B \times GZ$ & $B \times BG$. Vires autem $A \times AG$ & $B \times BG$, ob proportionales *A* ad *B* & *BG* ad *AG*, æquantur, adeoque, cum dirigantur in partes contrarias, se mutuo destruant. Restant vires $A \times GZ$ & $B \times GZ$. Tendunt hæ ab *Z* versis centrum *G*, & vim $A + B \times GZ$ componunt; hoc est, vim eandem ac si particule attractivæ *A* & *B* consisterent in eorundem communi gravitatis centro *G*, globum ibi componentes.



Eo-

Eodem argumento si adiungatur particula tertia C, & componatur huius vis cum vi $A + B \times GZ$ tendente ad centrum G, vis inde oriunda tendet ad commune centrum gravitatis globi illius G & particulae C, hoc est, ad commune centrum gravitatis trium particularium A, B, C, & eadem erit ad hunc globum & particula C constituerent in centro illo communi, globum maiorem ibi componentes. Et sic patetur in unum in eadem est igitur vis tota particularum omnium corporis cuiuscumque RSTP ac si corpus illud, servato gravitatis centro, figuram globi indueret. Q. E. D.

Corol. Hinc motus corporis attracti Z idem erit ac si corpus attrahens RSTP esset sphaericum & propterea si corpus illud attrahens vel quiescat, vel progrediatur uniformiter in directum, corpus attractum movebitur in Elliptici centrum habente in attrahentis centro gravitatis.

Prop. LXXXIX. Theor. XLVI.

Si corpora sint plura ex partibus equalibus constantia, quorum vires sunt in distantia eorum a singulis vi ex omnium viribus composita, quae corpusculum quodcumque trahunt, tendet ad commune centrum gravitatis, & eadem erit ac si trahentis illa, servato gravitatis centro communi, concurret in globum formarentur.

Demonstratur eodem modo, atq. Propositione superior.

Corol. Eodem motu corpori attracti idem erit ac si corpora trahentia, servato communi gravitatis centro, concurret in globum formarentur. Ideoque si corporum trahentium commune gravitatis centrum vel quiescat, vel progreditur uniformiter in linea recta, corpus attractum movebitur in Elliptici centrum habente in communi illo trahentium centro gravitatis.

E e

Prop.

$\times PE$ seu $PE \times Ff$, erit vis qua annulus iste trahit corpus P versus A ut $PE \times Ff \times \frac{AP \times FK}{PE}$ conjunctum, id est, ut contentum $Ff \times AP \times FK$, siue ut area $FKkf$ ducta in AP . Et propterea summa virium, quibus annuli omnes in circulo, qui centro A & intervallo AD describitur, trahunt corpus P versus A , est ut area tota $AHIKL$ ducta in AP . Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si vires punctorum decrescunt in duplicata distantiarum ratione, hoc est, si sit FK ut $\frac{1}{PF^2}$ quad., atq; adeo area

$AHIKL$ ut $\frac{1}{PA} - \frac{1}{PH}$, erit attractio corpusculi P in circum-

lum ut $1 - \frac{PA}{PH}$, id est, ut $\frac{AH}{PH}$.

Corol. 2. Et unversaliter, si vires punctorum ad distantias D sint reciproce ut distantiarum dignitas qualibet D^n , hoc est, si sit FK ut $\frac{1}{D^n}$, adeoq; area $AHIKL$ ut $\frac{1}{PA^{n-1}} - \frac{1}{PH^{n-1}}$, e-

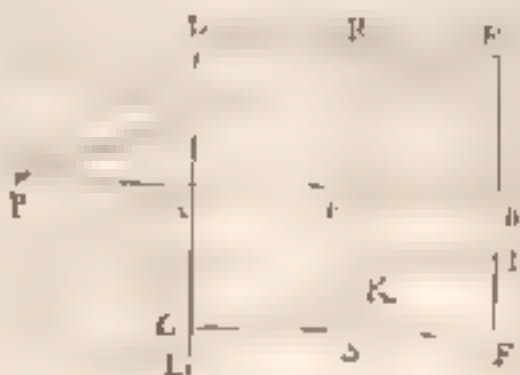
rit attractio corpusculi P in circumulum ut $\frac{1}{PA^{n-1}} - \frac{PA}{PH^{n-1}}$.

Corol. 3. Et si diameter circuli augeatur in infinitum, & numerus n sit unitate major, attractio corpusculi P in planum totum infinitum erit reciproce ut PA^{n-2} , propterea quod terminus alter $\frac{PA}{PH^{n-1}}$ evanescet.

Prop. XCI. Prob. XLV.

Invenire attractionem corpusculi siti in axe solidi, ad cujus puncta singula tendunt vires centripetæ in quacunq; distantiarum ratione decrescentes.

In solidum $ADEFG$ trahatur corpusculum P , situm in ejus axe AB . Circulo quolibet RFS ad hanc axem perpendiculari secetur hoc solidum, & in eius diametro FS , in plano aliquo $PALKB$ per axem tranſcunte, capiatur (per Prop. XC.) longitudo FK ut qua corpusculum P in circulum illam attrahatur proportionalis. Tangat autem punctum K curvam lineam LKI , planis extimorum circulorum AL & BI occurrentem in A & B , & erit attractio corpusculi P in solidum ut area $LABI$. Q. E. D.



Corol. 1. Unde si solidum Cylindrus sit, parallelogrammo $ADEB$ circa axem AB revolu-

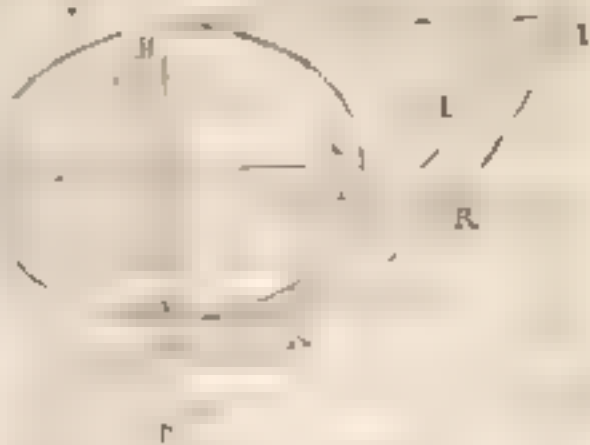
to descriptus, & vires centripetæ in singula eius puncta tendentes sint reciproce ut quadrata distantiarum a punctis: erit attractio corpusculi P in hunc Cylindrum ut $BA - PL + PD$. Nam ordinatam applicata FK (per Corol. 1. Prop. XC.) erit ut

$1 - \frac{PF}{PR}$. Hujus pars 1 ducta in longitudinem AB , describit aream $1 \times AB$; & pars altera $\frac{PF}{PR}$ ducta in longitudinem PB , descri-

bit aream 1 in $PT - AD$ (id quod ex curva LKI quadratura facile ostendi potest) & similiter pars eadem ducta in longitudinem PA describit aream 1 in $PD - AD$, deficiatque ipsarum Pb , PA differentiam AB describit arearum differentiam 1 in $PE - PD$. De contento primo $1 \times AB$ auferatur contentum posterius 1 in $PE - PD$, & restabit area $LABI$ aequalis 1 in $AB - PE + PD$. Ergo vis huius area proportionalis est ut $AB - PE + PD$.

Corol. 2. Hinc etiam vis innotescit qua Sphaerois $AGBCD$ attrahatur

trahit corpus quodvis P, exterius in axe suo AB situm. Sit NK-
RM Sectio Conica cuius ordinatim applicata ER, ipsi PE per-
pendicularis, aequetur semper longitudini PD, quæ ducitur ad
punctum illud D, in quo applicata ista Sphæroidem secat. A
Sphæroidis verticibus A, B ad eum axem AB erigantur perpen-
dicula AH, BM ipsi
AP, BP æqualia res-
pective, & propterea
Sectio Conica occu-
rentia in K & M, & jun-
gantur KM auferens ab
eodem segmentum K M-
RK. Sit autem Spha-
roidis centrum S & se-
miameter maxima SC.
& vi qua Sphæroidis tra-



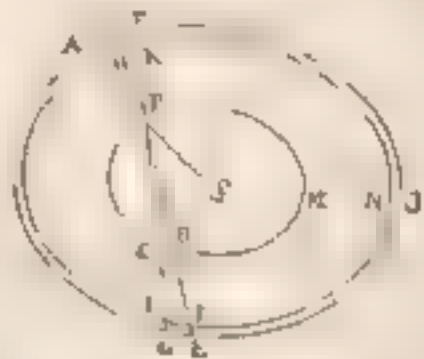
hit corpus P erit ad vim qua Sphæra, diametro AB descripta, tra-
hit idem corpus, ut $\frac{AS \times C Sq + ES \times K M R K}{P Sq + C Sq - ASq}$ ad $\frac{AS cub.}{3 P Sq quad}$.

Et eodem comparando tandem inuenire licet vires segmen-
torum Sphæroidis.

Corol. 3. Quod si corpusculum intra Sphæroidem in data qua-
vis eiusdem diametro collocetur, at-
tractio erit ut ipsius distantia a cen-
tro. Id quod si datus colli citur hoc
argumento. Sit AGOE Sphæroidis at-
trahens, S centrum ejus & P corpus
attrahitum. Per corpus illud P agan-
tur tum semiameter SPA, tum
rectæ dux quavis DE, FG Spha-
roidis hinc inde occurrentes in D &
E, F & G. Sintq, PCM, HLN superficies Sphæroidum duarum
interiorum, exteriori similiarum & concentricarum, quarum prior
tran-



trahant per corpus P & secet rectas DE & FG in B & C , posterior secet easdem rectas in H , I & K , L . Habcant autem Sphaeroides omnes axem communem, & erunt rectarum partes hinc inde interceptae DP & BE , IP & CG , DH & IL , PH & LG sibi mutuo aequales, propterea quod recta DE , PB & HI bisequantur in eodem puncto, ut & recta FG , PC & KL . Concipe jam DPF , EPC designare Conos oppositos, angulis verticalibus DPF , EPC infinite parvis descriptos, & lineas etiam DH , EL infinite parvas esse, & Conorum particula Sphaeroidum superficiem abscinde $DHHF$, $GLIE$, ob aequalitatem linearum DH , EL , erunt ad invicem ut quadrata distantiarum suarum a corporeculo P , & propterea corpusculum illud aequaliter trahent. Et partitione, si superficiebus Sphaeroidum internarum similibus concentricarum & axem communem habentium dividantur spatia DPF , $EGCB$ in particulas, haec omnes utraque aequaliter trahent corpus P in partes contrarias. Aequales igitur sunt vires com DPF & elemento Cuius $EGCB$, & per contrarietatem se mutuo deservant. Et prae est ratio vimini materiae omnis extra Sphaeroidem internam $PCBM$. Transeat igitur corpus P a sola Sphaeroidis interna $PCBM$, & propterea (per Corol. 3. Prop. LXXII), attractio eius est ad vim, qua corpus A trahitur a Sphaeroidis tota $ACOD$, ut distantia PS ad distantiam AS . Q. E. I



Prop. XCII. Prob. XLVI.

Dato corpore attractivo, invenire rationem decrementi vimini centripetarum in eius puncta figura tendentium.

¶ corpore dato formanda est Sphaera vel Cylindrus aliave figura

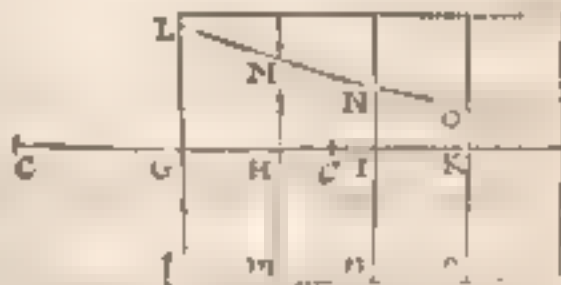
ra regularis, cujus lex attractionis, cujus decrementi rationi congruens (per Prop. LXXX. LXXXI. & XCI.) inveniri potest. Deinde factis experimentis invenienda est vis attractionis in diversis distantis, & lex attractionis in totum inde patefacta dabit rationem decrementi virium partium singularum, quam invenire oportet.

Prop. XCIII. Theor. XLVII.

Si solidum ex una parte planum, ex reliquis autem partibus infinitum, constet ex particulis aequalibus equaliter attractivis, quarum vires in recessu a solido decrevant in ratione potestatis cujusvis distantiarum plerumque quadratae, & si solido totius corpusculum ad utramvis plani partem constitutum trahatur: dico quod solido vis illa attractiva, in recessu ab eius superficie plana, decrescet in ratione potestatis, cujus basis est distantia corpusculi a plano, & Index ternario minor quam Index potestatis distantiarum.

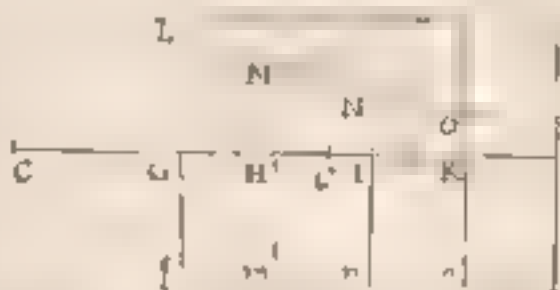
Case. 1. Sit LG planum quo solidum terminatur. Jaceat autem solidum ex parte plani hujus versus I , inq; plana innumera mHM , nIN &c. ipsi GL parallela resolvatur. Et primo collocetur corpus attractivum C extra solidum. Agatur autem $CGHI$ planis illis innumeri perpendicularis, & decrevant vires attractivae punctorum solidi in ratione potestatis distantiarum, cujus index sit numerus n ternario non minor. Ergo (per Corol. 3. Prop. XC.) vis quae planum quodlibet mHM trahit punctum C est reciproce ut $CH^n - 2$. In plano mHM capiatur longitudo HM ipsi $CH^n - 2$ reciproce proportionalis, & erit vis illa ut HM . Similiter in planis singulis IGL , nIN , oKQ &c, capi-

antur



antur longitudines CL , IN , KO &c. ipsi $CG^n - 2$, $CI^n - 2$, $CK^n - 2$ &c. reciproce proportionales, & vires planorum eorundem erant ut longitudines captae, adeoque summa virum ut summa longitudinum, hoc est, vis solidi totius ut area $GLOK$ in infinitam versus OK producta. Sed area illa per notas quadraturarum methodos est reciproce ut $CG^n - 3$, & propterea vis solidi totius est reciproce ut $CG^n - 3$ Q.E.D.

Cor. 2. Collocetur jam corpusculum C ex parte plana ICL intra solidum, & capiatur distantia CK equalis distantiae CG . Et solidi pars $LGOHKO$, planis parallelis ICL , & hO terminata, corpusculum C in medio situm nullam in partem trahit, contrarius oppositorum punctorum actionibus se mutuo per aequalitatem tollentibus. Proinde corpusculum C sola vi solidi a planum OK sit trahitur. Hae autem vis C per *Cor. 1* prima, est reciproce ut $CK^n - 3$, hoc est C ob aequales CG , CK , reciproce ut $CG^n - 3$. Q.E.D.



Corol. 1. Hec si solidum $ICLN$ planis duabus infinitis parallelis LG , IN utrinque terminatum, immo et ut C vis attractiva solidi cendo de vi attractiva solidi totius $ICLN$ sit $ICLO$ vim attractivam partu. ultionis $NIhO$, in infinitam versus hO productae.

Corol. 2. Si solidi huius infiniti pars alterior, quando attractio eius collata cum attractione partis citioris nullus penitus est momenti, reputatur attractio partis illius citioris atque de distantia decrescat quam proximam ratione potestatis $CG^n - 3$.

Corol. 3. Et hinc si corpus quodvis duntaxat & ex una parte planum trahat corpusculum e regione medi illius plani, & distantia inter corpusculum & planum collata cum dimensionibus cor-

cor-

corporis attrahentis perexigua sit, confiet autem corpus attrahens ex particulis homogeneis, quarum vires attractivæ decreverunt in ratione potestatis cubicæ plusquam quadruplicatæ distantiarum, vis attractiva corporis totius decreverit quamproxime in ratione potestatis, cubicæ sit distantia illa perexigua, & Index ternario minor quam Index potestatis prioris. De corpore ex particulis constante, quarum vires attractivæ decreverunt in ratione potestatis triplicatæ distantiarum, assertio non valet, propterea quod, in hoc casu, attractio partis illius ulterioris corporis infiniti in Corollario secundo, semper est infinite major quam attractio partis ceterioris.

Scholium.

Si corpus aliquod perpendiculariter versus planum datum trahatur, & ex data lege attractionis quærat^{ur} motus corporis. Solvetur Problema querendo (per Prop. XXVII.) motum corporis recta descendens ad hoc planum, & (per Legum Corol. 2.) componendo motum istum cum uniformi motu, secundum lineas eidem plano parallelas tacto. Et contra, si quærat^{ur} Lex attractionis in planam secundum lineas perpendiculares tactæ, ea conditione ut corpus attractum in data quacunq, curva linea moveatur, solvetur Problema operando ad exemplum Problematis tertii.

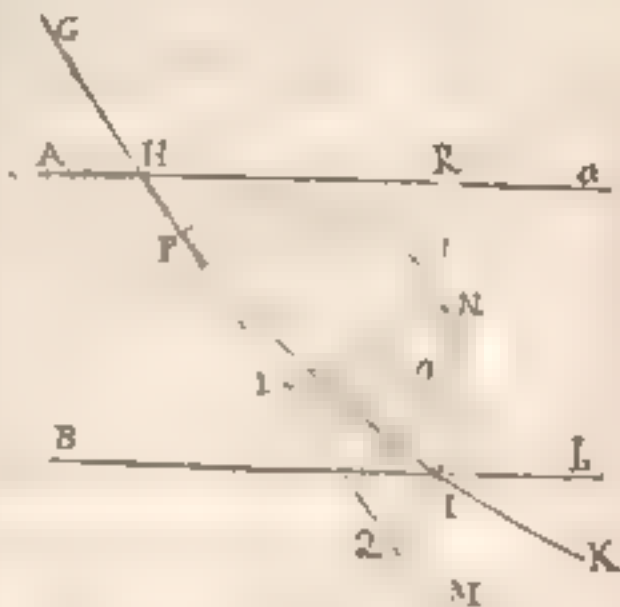
Operationes autem contrahi solent resolvendo ordinatim applicatas in series convergentes. Ut si ad basem A in angulo quo vis dato ordinatim applicetur longitudo B , qua sit ut basis dignitas quælibet $A^{\frac{m}{n}}$, & quærat^{ur} vis qua corpus, secundum positionem ordinatim applicatæ, vel in basem attractum vel a basi luctantem, moveri possit in curva linea quam ordinatim applicata termino suo superiore semper attingit. Suppono basem augeri par-

F f

re

re quam minima O , & ordinatim applicatam $A + O^{\frac{m}{n}}$ resolvo in Seriem infinitam $A^{\frac{m}{n}} + \frac{n}{m} O A^{\frac{m-n}{n}} + \frac{m(m-n)}{2nn} O^2 A^{\frac{m-2n}{n}}$ &c. atque, huius termino in quo O duarum est dimensionum, id est termino $\frac{m(m-n)}{2nn} O^2 A^{\frac{m-2n}{n}}$ vim proportionalem esse suppono. Est igitur vis quesita ut $\frac{m(m-n)}{nn} A^{\frac{m-2n}{n}}$, vel quod perinde est, ut $\frac{m(m-n)}{nn} B^{\frac{m-2n}{n}}$. Ut si ordinatim applicata Parabola attingat, existente $m=2$, & $n=1$: fiet vis ut data $2B^0$, adeoque dabitur. Data igitur vi corpus movebitur in Parabola, quemadmodum *Galileus* demonstravit. Quod si ordinatim applicata Hyperbola attingat, existente $m=0-1$, & $n=1$: fiet vis ut $2B^{-3}$ seu $\frac{2}{B^{\text{cub.}}}$ adeoque vi, quae sit reciproce ut cubus ordinatim applicatae, corpus movebitur in Hyperbola. Sed misse huiusmodi Propositionibus, pergo ad alias quasdam de motu, quas nondum attigi.

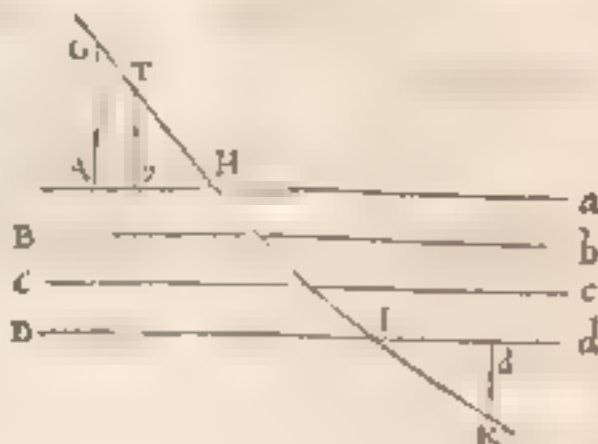
callo LI describatur circulus, secans tam HM in P & Q , quam MI productam in N , & primo si attractio vel impulsus ponatur uniformis, erit (ex demonstratis *Galilei*) curva HI Parabola, cujus hæc est proprietas, ut rectangulum sub dato latere recto & linea IM æquale sit HM quadrato, sed & linea HM bisecabitur in L . Unde si ad M demittatur perpendicularum LO , æquales erunt MO , OR ; & additis æqualibus IO , ON , fient totæ æquales MN , IR . Proinde cum IR datur, datur etiam MN , estq. rectangulum NMI ad rectangulum sub latere recto & IM , hoc est, ad $HMq.$, in data ratione. Sed rectangulum NMI æquale est rectangulo PMQ , id est, differentiarum quadratorum



MI^2 & PL^2 . seu LI^2 , & HM^2 . datam rationem habet ad sumptis quartam partem LM^2 . ergo datur ratio ML^2 ad LI^2 ad MI^2 , & divisa, ratio LI^2 ad ML^2 & ratio divisa LI ad MI . Sed in omni triangulo LMI , anguli oppositi sunt proportionales lateribus oppositis. Ergo datur ratio sinus anguli incidentis LMR ad sinus anguli emergentis LIR . Q. E. D.

Cor. 2. Transcat jam corpus successive per spatia plura parallelis plura terminata, $AabB$, $Bbct$ &c. & agatur vi qua sit in singulis separatim uniformis, at in diversis diversa, & per iam demonstrata, si us incidentia in planum primum Aa erit ad sinum emergentem ex plano secundo Bb , in data ratione, & hic sinus, qui est sinus incidentia in planum secundum Bb , erit ad sinum

num emergentia ex plano tertio Cc , in data ratione, & hic sinus ad sinum emergentia ex plano quarto Dd , in data ratione, & sic in infinitum & ex æquo sinus incidentia in planum primum ad sinum emergentia ex plano ultimo in data ratione. Minuat jam planorum intervalla & augeatur numerus in infinitum, eo ut attractionis vel impulsus actio secundum legem quamcunque assignatam continua reddatur; & ratio sinus incidentia in planum primum ad sinum emergentia ex plano ultimo, semper data existens, certum dabitur. Q. E. D.



Prop. XCV. Theor. XLIX.

Isdem positis, dico quod velocitas corporis ante incidentiam est ad eius velocitatem post emergentiam, ut sinus emergentia ad sinum incidentia.

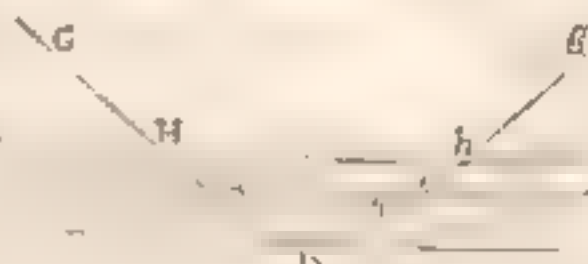
Capiantur AH , Id aequales, & erigantur perpendiculara AG , dK a currentia lineis incidentia & emergentia GH , IK , in G & K . In GH capitur IH æqualis IK , & ad planum Aa demittatur normaliter Tw . Et per Legum Corol. 2. distinguatur motus corporis in duos, unum planis Aa , Bb , Cc & c. perpendiculararem, alterum inde parallelum. Vis attractionis vel impulsus agendo secundum lineas perpendiculares nil mutat motum secundum parallelas, & propterea corpus hoc motu conficiet æqualibus temporibus æqualia illa secundum parallelas intervalla, quæ sunt inter lineam AG & punctum H , interq. punctum I & lineam dK , hoc est, æqualibus temporibus describet lineas GH , IK .

IK Proinde velocitas ante incidentiam est ad velocitatem post emergentiam, ut *GH* ad *Ih* vel *TH*, id est, ut *AH* vel *Id* ad *eH*, hoc est (respectu radii *TH* vel *IK*) ut sinus emergentiae ad sinum incidentiae. Q. E. D.

Prop. XCVL Theor. L.

Idem politis & quod motus ante incidentiam velocior sit quam postea, dico quod corpus, inclinando lineam incidentiae, reflectetur tandem, & angulus reflexionis fiet aequalis angulo incidentiae.

Nam concipe corpus inter plana parallela *Aa*, *Bb*, *Cc* &c. describere arcus Parabolicos, ut supra, sintq; arcus illi *HP*, *PQ*, *QR*, &c. Et sit ea linea incidentia *GH* obliquitas ad planum primum *Aa*, ut sinus incidentiae sit ad radium circuli, cuius est sinus, in ea ratione quam habet idem sinus incidentiae ad sinum emergentiae ex plano *Dd*, in spatium *DdeE*: & ob sinum emergentiae iam factum aequalem radio, angulus emergentiae erit rectus, adeoque linea emergentiae coincidet cum plano *Dd*. Perveniat corpus ad hoc planum in puncto *R*, & quoniam linea emergentiae coincidet cum eodem plano, perspicuum est



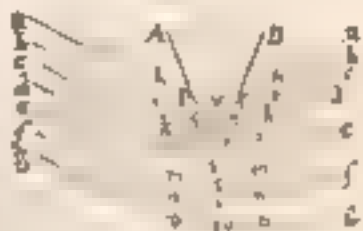
quod corpus non potest ultra pergere versus planum *Ee*. Sed nec potest idem perire, & linea emergentia *Rd*, propterea quod perpetuo aut aliter vel impellatur versus medium incidentiae. Revertetur itaq; inter plana *Cc*, *Dd* describendo arcum Parabolae *QRq*, cuius vertex principalis (iuxta demonstrata *Galilei*) est in *R*, & caet planum *Cc* in eodem angulo in *q*, ac prius in *Q*; & ut periret in arcibus parabolicis *qp*, *ph* &c. arcibus prioribus *QP*, *PH* &c. aequalibus, itcabit reliqua plana in eodem angulo in *p*, *l* &c. ac prius in *P*, *H* &c. emergetq; tandem eadem obliquitate in *h*, qua uenit in *H*. Concipe tam planum

no-

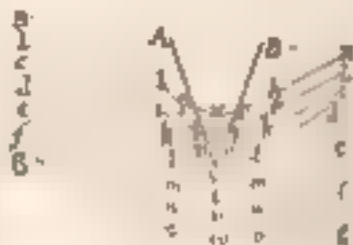
norum *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee* intervalla in infinitum minui & numerum augeri, eo ut actio attractionis vel impulsus secundum legem quamcumq; assignatam continua reddatur, & angulus emergentiae semper angulo incidentiae aequalis existens, eidem etiam manebit aequalis Q. E. D.

Scholium.

Harum attractionum haud multum dissimiles sunt Lucis reflexiones & refractiones, factae secundum datam secundam rationem, ut invenit *Huighius*, & per consequens secundam datam secundam rationem, ut exposuit *Cartesius*. Namq; Lucem successive propagari & spatio quasi decem martiorum primorum a Sole ad Terram venire, non constat per Phænomena Satellitum *Jovis*, Observationibus diversarum Astronomiarum confirmata. Radii autem in aere existente (ubi sedem *Comas*, hanc per foramen in tenebrosam cubitalem adhibitam, invenit & ipse quoq; expertus sum) in transitu suo prope corporum vel opacorum vel perspicuorum angulos (quales sunt diametrorum ex auro, argento & cretae cuspium terminum rectanguli circulate, & cuspium, lapidum aut tractuum vitreorum acies) incurvantur circum corpora, quasi attracti in eadem, & ex his radiis, qui in transitu suo propius accedant ad corpora incurvantur magis, quasi magis attracti, ut ipse etiam diligenter observavi. In figura designat *s* aciem cuspium vel cunei circularis *AaB*, & *gwwog*, *fnvns*, *entme*, *dlsl* sunt radii, arcibus *omg*, *azn*, *mtm*, *lsl* versus cuspem incurvati, idq; magis vel minus pro distantia eorum a cuspide. Cum autem talis incurvatio radiorum fiat in aere extra cuspem, debent etiam radii, qui incident in cuspem, prius incurvari in aere quam cuspem attingunt. Et par est ratio undequam in



vitrum. Fit igitur refractio, non in puncto incidentiæ, sed paulatim per continuam incurvationem radiorum; factam partim in aere antequam attingunt vitrum, partim (ni fallor) in vitro, postquam illud ingressi sunt: uti in radiis $ekzke$, $bryzb$, $abxba$ incidentibus ad r , q , p , & inter k & z , r & y , b & x incurvatis, delineatum est. Igitur ob analogiam quæ est inter propagationem radiorum lucis & progressum corporum, visum est Propositiones sequentes in usus opticos subiungere, interea de natura radiorum (utrum sint corpora necne) nihil omnino disputans, sed trajectorys corporum trajectorys radiorum persimiles solummodo determinans.



Prop. XCVII. Prob XLVII.

Posito quod sinus incidentis in superficiem aliquam sit ad sinum emergentis in data ratione, quod si incurvatio axis corporum iuxta superficiem illam sit in spatio brevissimo, quod ut punctum considerari possit, determinare superficiem per corpuscula omnia de loco dato successive manantia convergere faciat ad alium locum datum.

Sit A locus a quo corpuscula divergunt, B locus in quem convergere debent, CDE curva linea quæ circa axem AB revoluta describat superficiem quaeritam; D , E curvæ illius puncta duo quavis; & EF , EG perpendiculara in corporis vias AD , DB demissa. Accedat punctum D ad punctum E , & lineæ DF quæ AD augetur, ad lineam DG quæ DB diminuitur, ratio ultima erit eadem quæ sinus incidentiæ ad sinum emergentiæ. Datur ergo ratio incrementi lineæ AD ad decrementum lineæ DB , & propterea si in axe AB sumatur ubi vis punctum C , per quod curva CDE transire debet, & capiatur ipsius AC incrementum CM , ad ipsius BC decrementum CN in data ratione, centriq. A , B , &

puncto D utcumq, assumpto. Et posito sinu incidentia in superficiei primam ad sinum emergentia ex eadem, & sinu emergentia e superficie secunda ad sinum incidentia in eadem, ut quantitas aliqua data M ad aliam datam N , productum AB ad G ut sit BG ad CE ut M ad N , tum AD ad H ut sit AH ad AG , tum etiam DF ad K ut sit DK ad DH ut N ad M . Junge KB , & centro D intervallo DH describe circulum occurrentem KB producta in L , ipsaq, DL producamus age BF : & punctum F tanget lineam EL , quae circa axem AB revoluta describet superficiem quorundam. Q. E. D.

Nunc concipe lineas CP , CQ & AD , DF respective, & EL , ES & FB , FD utq, per puncta utresq, ad eaq, Q ut CL & CS per quadratum, & ut CL per Corol. 2. Prop. XCVII.) PD ad QD ut M ad N , ad eaq, ut DL ad DK vel FB ad FK , & divisim ut $DL - FB$ seu $PH - PD - FB$ ad FD seu $FQ - QD$ & compositae ut $HP - FD$ ad LQ ad eaq, ut $HP - FD$ ad LQ & CL & $CL + BC$ FK ad $CL - FS$. Verum (ob proportionales BG ad CE & M ad N) est etiam $CE + BG$ ad CE ut M ad N : adeoq, ut $FB - FD$ ut M ad N , & propterea per Corol. 2. Prop. XCVII. ipsae lineae EL & ES congruant se secundum lineam DF modicos pergere in linea FK ad locum B, Q, E, D .

Scholium.

Eadem methodo pergere liceret ad superficies tres vel plures. Ad usus autem Opticos maxime commodatae sunt figurae Sphaericae & Peripicillorum vitra Obiectiva ex vitris duobus Sphaeri-

ce figuratis & Aquam inter se claudentibus consistunt, fieri po-
 test ut a refractionibus aquae errores refractionum, quae sunt in
 vitrorum superficiibus extremis, latius accurate corrigantur. Ta-
 lia autem vitra Obiectiva vitris Ellipticis & Hyperbolicis praefer-
 rendi sunt, non solum quod laetius & accuratius formari possint,
 sed etiam quod penitus illos radiorum extra axem vitri tunc accen-
 sibus refringant. Verum concluditur, quod errorum radiorum res-
 tringentibus impedimento est, quo minus Opus per figuras vel
 Sphaeras vel alias quascunque perfici possit. Nam corrigi possit
 errores illinc oriundi, labor omnis in ceteris corrigendis impente
 collocabitur.

D E

MOTU CORPORUM

Liber SECUNDUS.

S E C T. I.

De Motu corporum quibus resistitur in ratione velocitatis.

Prop. I. Theor. I

Corporis, cui resistitur in ratione velocitatis, motus ex resistantia amissus est in spatium morando confectum

NAm cum motus singulis temporis partibus amissus sit ut velocitas, hoc est ut minoris confecti particula: erit componendo motus toto tempore amissus ut iter totum. Q. E. D.

Corol. Igitur si corpus gravitate omni desututum in spatium libere sola vi inertia moveatur, ac de sursum motus totus sub initio, tum etiam motus reliquus post spatium aliquod confectum, dabitur spatium totum quod corpus in infinito tempore describere potest. Erunt enim spatium illud ad spatium iam descriptum ut motus totus sub initio ad motus illius partem amissam.

Lem

Lemma. I.

Quantitates differentius suis proportionales, sunt continue proportionales.

Sic A ad $A - B$ ut B ad $B - C$ & C ad $C - D$ &c. & dividendo licet A ad B ut b ad c & C ad D &c. Q. E. D.

Prop. II. Theor. II.

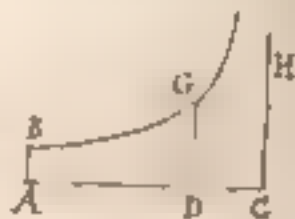
Si corpori resistitur in ratione velocitatis, & sola vi insita per Medium simile moveatur, sumantur autem tempora equalia velocitates in principis singulorum temporum sunt in progressionem Geometricam, & spacia singulis temporibus descripta sunt ut velocitates.

Cas. 1 Dividatur tempus in particulas aequales, & si ipsis particularum tantus agat vis resistentiæ impulsus unico, quæ sit ut velocitas, erit decrementum velocitatis singulis temporis particulis ut eadem velocitas. Sunt ergo velocitates differentius suis proportionales, & propterea (per Lem. I Lib. II) continue proportionales. Proinde si ex aequali particularum numero componantur tempora quælibet equalia, erunt velocitates ipsis temporum mens, ut terminis in progressionem continua, qui per saltum capiuntur, omnes passim aequali terminorum intermediarum numero. Componantur autem horum terminorum rationes ex æqualibus rationibus terminorum intermediarum æqualiter repetitis, & propterea sunt æquales. Igitur velocitates his terminis proportionales, sunt in progressionem Geometricam. Minuantur jam æquales illæ temporum particule, & augetur earum numerus in infinitum, eo ut resistentiæ impulsus reddatur continuus, & velocitates ut principis æqualium temporum, semper continue proportionales, erunt in hoc etiam *Cas.* continue proportionales. Q. E. D.

Cas.

Cas. 2. Et diviſum velocitatum differentia, hoc eſt earum partes ſingulis temporibus annua, ſunt ut totæ. Spatia autem ſingulis temporibus deſcripta ſunt ut velocitatum partes amæ, (per Prop. I Lib. II.) & propterea etiam ut totæ (Q. E. D.)

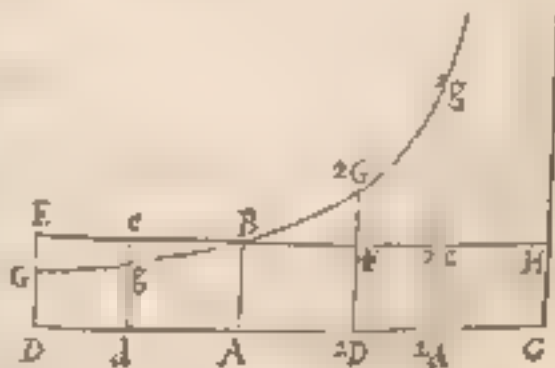
Corol. Hinc ſi Aſymptotiſ reſtanguulis ADC , CH deſcribat Hyperbola BG , ſi tq. AB , DC ad Aſymptoton AC perpendicularæ, & exponatur tum corporis velocitas tum reſiſtentia Medii, ipſo motu initio, per lineam quæcunq. datam AC , elapſo autem tempore aliquo per lineam in deſinitam DC exponi poteſt tempus per aream $ABGD$, & ſpati in eo tempore deſcriptum per lineam AD . Nam ſi area illa per motum puncti D augeatur un termiter ad modum temporis, decreſcet reſta DC in ratione Geometrica ad modum velocitatis, & partes rectæ AC a ſpatiſ temporis deſcriptæ decreſcent in eadem ratione.



Prop. III. Prob. I.

Corporis, cui dum in Medio ſimilari rectis aſcendit vel deſcendit, reſiſtitur in ratione æ locutæ, quod ſi, ab uniformi gravitate urgeatur, deſinire motum.

Corporis aſcendente, exponatur gravitas per datum quodvis reſtangelum BC , & reſiſtentia Medii initio aſcenſus per reſtangelum BD ſumptum ad contrarias partes. Aſymptotiſ reſtangelis AC , CH , per punctum B deſcribat Hyperbola EG perpendiculari DE , de in G , g , & corpus aſcendendo, tempore DG , d , dea ibet ſpatium EG , e , tempore $DGBA$ ſpati-



um ascensus totius LCB , tempore $AB \text{ \& } G \text{ \& } D$ spatium descen-
sus $BF \text{ \& } G$, atq; tempore $2D \text{ \& } G \text{ \& } g \text{ \& } d$ spatium descensus
 $2GF \text{ \& } 2g$ & velocitatis coeponi (resistive Medii propor-
tionales) in horum temporum periodis erunt $ABED$, $ABed$,
nulla, $ABF \text{ \& } D$, $AB \text{ \& } 2e \text{ \& } d$ respective, atq; maxima velocitas,
quam corpus descendendo potuit acquirere, erit bc .

Recto videri etiam rectam esse AD in rectam illa innumera
 AK , KL , LM , MN &c. quae sunt ut velocitatem
aequalibus totidem temporibus acta, & erunt ita, AK , AL ,
 AM , AN &c. ut velocitates totae, atq; adeo (per Hypoth. in)
ut resistentia Medii in

principio singulorum tem-
porum i punctum ut AC
ad AK vel $ABHC$ ad
 $ABkk$, ut vis gravitatis
ad resistentiam in princi-
pio temporis secundi, d q
vi gravitatis subducatur
resistentiae, & maneat
 $ABHC$, $AKHC$, LHC ,
 NHC , &c. ut vires absolue quibus corpus in principio singu-
lorum tempo- rum p-ctur, atq; ad 0 (per motus Legem II.)
ut velocitatem, id est, ut rectam illa AK , KL , LM ,
 MN &c. & praeterea (per Lem I Lib. II, in progressionem
Geometricam. Quae rectae AK , KL , LM , MN &c. productae oc-
currant Hyperbolae n. q , r , s , t &c. erunt areae $ABqk$, $AKqr$, Lr ,
 LMs , MNt &c. aequales, adq; cum temporibus tum viri-
bus gravitatis semper aequalibus analogae. Fit autem area $ABqk$
(per Corol. 3 Lem. VII. & Lem. VIII Lib. I ad arcum bkg
ut b p ad k p in AC ad Ak , hoc est ut vis gravitatis ad re-
sistentiam in medio temporis primi. Et simili argumento areae
 $qklr$, $rlns$, $smnt$ &c. sunt ad areas $qklr$, $rlns$, $smnt$
&c. ut vires gravitatis ad resistentias in medio temporis secundi
ter-



tertia, quarti, &c. Proinde cum arcæ æquales $BAKq$, $qK Lr$, $rL M s$, $sM N t$, &c. sint viribus gravitatis analogæ, erunt arcæ Bkq , $qklr$, $rlms$, smt , &c. resultantis in mediis triangulorum temporum, hoc est, (per Hypothesin) velocitatibus, atq; adeo descriptis spatii analogæ. Sumantur analogarum summæ, & erunt arcæ Bkq , Blr , Bms , Bnt , &c. spatii totis descriptis analogæ; necnon arcæ $ABqK$, $ABrL$, $ABsM$, $ABtN$, &c. temporibus. Corpus igitur inter descendendum, tempore quovis $A-B$ rI , describit spatium Blr , & tempore $LrtN$ spatium $rlms$. Q. E. D. Et inuis est demonstratio motus exponentii. ascensu. Q. E. D.



Corol. 1. Igitur velocitas maxima, quam corpus cadendo potest acquirere, est ad velocitatem dato quovis tempore acquiritam, ut vis data gravitati qua perpetuo urgetur, ad excessum vis hujus supra vim qua in line temporis illius retinetur.

Corol. 2. Tempore autem aucto in progressionem Arithmetica, summa velocitatis illius maxime ac velocitatis in auctum (atq; etiam earum demum differentia in defectu) decrescit in progressionem Geometrica.

Corol. 3. Sed & differentia spatiorum, qua in æqualibus temporum differentis describuntur, decrescant in eadem progressionem Geometrica.

Corol. 4. Spatium vero a corpore descriptam differentia est duorum spatiorum, quorum alterum est ut tempus sumptum ab initio decematis, & a tertio ut velocitas, quæ etiam quæso descensus initio æquantur inter se.

Prop.

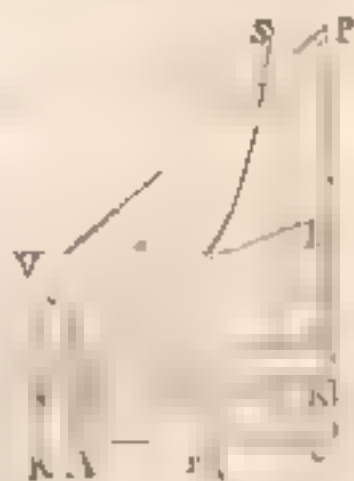
Prop. IV. Prob. II.

Posito quod vis gravitatis in Medio aliquo similari uniformis sit, accendat \perp perpendiculariter ad planum Horizontis; definire motum Projectile, in eodem resistentiam velocitati proportionalem patientis

E loco quovis D egrediatur Projectile secundum lineam quamvis rectam DP , & per longitudinem DP exponatur eundem velocitas suo initio motus. A puncto P ad lineam Horizontalem DC describatur perpendicularum PC , & recetur DC in A ut sit DA ad PC ut resistentia Medii ex motu in altitudine sub initio orta, ad vim gravitatis, vel (quod perinde est) ut sit rectangulum sub DA & DP ad rectangulum sub AC & PC ut resistentia tota sub initio motu ad vim Cavittatis. Describatur Hyperbola quævis $GIBS$ secans erectam perpendicularis PG , AB in G & B , & compleatur parallelogrammum $PGKC$, cujus latus GK secet AB in Q . Capiatur linea N in ratione ad QB qua PC sit ad CP , & ad rectam DC punctum quodvis R erecto perpendicularo RI , quæ Hyperbola in I , & rectis GK , DP in t & P occurrat; in eo cape Pr æqualem $\frac{GT}{N}$, & Projectile tempore $DRIG$ pervenit ad punctum r , describens curvam lineam $Dr s F$, quam punctum r semper tangit, perveniens autem ad maximam altitudinem s in perpendicularo AB , & postea semper

H h

af



tus initio, ad vim gravitatis, Parabola construatur. velocitas quam corpus exire debet de loco D secundum rectam DP , ut in Medio uniformi resistente describat Curvam $Dr a F$, ea ipse erit quam exire debet de eodem loco D , secundum eandem rectam DR , ut in spatio non resistente describat Parabolam. Nam Latus rectum Parabolæ hujus, in se motus initio, est $\frac{DV^2_{\text{quad.}}}{1r}$ &

Vr est $\frac{GT}{N}$ seu $\frac{DR \times T_1}{2N}$ Recta autem, quæ, si duceretur,

Hyperbolam GTB tangeret in G , parallela est ipsi DK , adeoq,

T_1 est $\frac{CK \times DR}{DC}$, & N erit $\frac{QB \times DC}{CP}$. Et propterea Vr est

$\frac{DR \times CK \times CP}{2 \times DC \times Q}$, id est (ob proportionales DR & DC , DV

& DP) $\frac{DV \times CK \times CP}{2 \times DP \times QB}$ & Latus rectum $\frac{DV^2_{\text{quad.}}}{1r}$ prodit

$\frac{2 \times DP \times QB}{CK \times CP}$, id est (ob proportionales QB & CK , DA & AC)

$\frac{2 \times DP \times DA}{AC \times CP}$, adeoq ad $2DP$ ut $DP \times DA$ ad $PC \times AC$, hoc

est ut resistentia ad gravitatem QE . D .

Corol. 2. Unde si corpus de loco quovis D , data cum velocitate, secus quam rectam quamvis positione datam DP pronociatur, & resistentia Medio ipso motus initio detur, inveniri potest Curva $Dr a F$, quam corpus idem describet. Nam ex data velocitate datur latus rectum Parabolæ, ut notum est. Et sumendo $2DP$ ad latus illud rectum ut est vis Gravitatis ad vim resistentem, datur DP . Deinde secundo DC in A , ut sit $CP \times AC$ ad $DP \times DA$ in eadem illa ratione Gravitatis ad resistentiam, dabitur punctum A . Et inde datur Curva $Dr a F$.

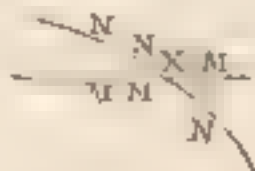
Corol. 3. Et contra, si datur curva $Dr a F$, dabitur & velocitas corporis & resistentia Medio in locis singulis. Nam ex da-

ex ratione $CP \times AC$ ad $DP \times DA$, datur tum resistentia Medii sub initio motus, tum latus rectum Parabola & inde datur etiam velocitas sub initio motus. Deinde ex longitudine tangenti EL , datur & hinc proportionalis velocitas & velocitati proportionalis resistentia in loco quovis r .

Corol. 4. Cum autem longitudo $2DP$ sit ad latus rectum Parabola ut gravitas ad resistentiam in D , & ex aucta Velocitate augeatur resistentia in eadem ratione, at latus rectum Parabola augeatur in ratione illa duplicata per r longitudo $2DP$ augeatur in ratione illa simplici, ad op , velocitati semper proportionalem esse, atque ex angulo CDP mutato augeri vel minui, nisi mutetur quoque velocitas.

Corol. 5. Unde sequitur methodus determinandi Curvam DEF ex Hypothesibus quae proxime, & inde colligendi resistentiam & velocitatem quaecumque per praestatur. Pronciantur corpora duotribus & aequalia eadem cum velocitate, de loco D , secundum angulos diverso CDP , & CDp (mutantur etiam litterae in locis subintelligendis) & connotantur loca E , F , ubi incidunt in horizontale planum DE . Tum assumpto quocumque longitudine pro DP vel Dp , fingatur quodam retinetur DE ad DE utatem in ratione quacunque & exponatur ratio illa per hanc rudimentum gravitatis SM . Deinde per computationem, & calculum illa assumpta DP , inveniuntur longitudines DE , DF , ac de ratione $\frac{EF}{DE}$ per

calculus inventa, augetur ratio eadem per experimentam inventa, & exponatur differentia per perpendiculari MM . Idem fac iterum ac tertio, assumendo semper novam resistentiam ad gravitatem rationem SM , & colligendo novam differentiam MM . Dicantur autem differentiae affirmativae ad unam partem rectae SM , & negativae ad alteram; & per puncta N , N , N auctur curva requiritur NNN secans rectam SM .



$SMMM$ in X , & erit SX vera ratio resistentiae ad gravitatem, quam invenire oportuit. Ex hac ratione colligenda est longitudo DF per calculum, & longitudo quae sit ad assumptam longitudinem DP ut modo inventa longitudo DF ad longitudo DP eandem per experimentum cognita, erit vera longitudo DP . Quia in terra, i. hinc tum Curva DF qua in corpore describit, tum corporis velocitas & resistentia in locis singulis.

Solutio.

Ceterum corpora resistunt ratione velocitatis Hypothesis est magis Mathematica quam Naturalis. Obstat hac ratio quamproxime ubi corpora in Medium rigore aliquo praeditis tardissime moventur. In Medium autem quae rigore omni vacant (uti postea demonstrabitur) corpora resistunt in duplicata ratione velocitatis. Actione corporis velocioris communicatur eidem Medium quantitati, tempore maiore, motus maior in ratione maioris velocitatis, adeoque tempore aequo (ob maiorem Medium quantitatem perturbatam) communicatur motus in duplicata ratione maior, estque tertius, per motus Legem 2. & 3., ut motus communicatus. Videamus igitur quales oriuntur motus ex hac lege Resistentiae.

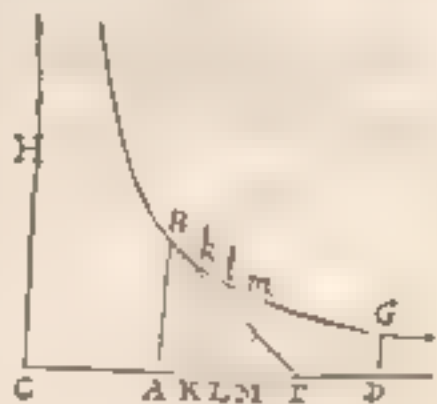
S E C T. II.

De motu corporum quibus resistitur in duplicata ratione velocitatum.

Prop. V. Theor. III.

Si corpori resistitur in velocitatis ratione duplicata, & sola 21 insula per medium simile moveatur, tempora 22 sumantur in progressionem Geometricam a minoribus terminis ad majores pergente dico quod velocitates initio singulorum temporum sunt in eadem progressionem Geometricam inverse, & quod spatia sunt equalia quae singulis temporibus describuntur.

Nam quoniam quadrato velocitatis proportionalis est resistentia Medii, & resistentiae proportionale est decrementum velocitatis, si tempus in particulas innumeras aequales dividatur, quadrata velocitatum singuli temporum initis erunt velocitatum earundem differentis proportionales. Sunt temporis particulae illae $AK, KL, LM, &c.$ in recta CD sumptae, & eruantur perpendicularia $AB, Kk, Ll, Mm, &c.$ Hyperbolae $BklmC$, centro C Asymptotus rectae CD, CH , descriptae occurrentia in $B, k, l, m, &c.$ & erit AB ad Kk ut CK ad CA , & dividim $AB - Kk$ ad Kk ut AK ad CA , & vicilim $AB - Kk$ ad AK ut Kk ad CA , adeoque ut $AB \times Kk$ ad $AB \times CA$. Unde cum AH & $AB \times CA$ dentur, erit $AB - Kk$ ut $AB \times Kk$, & ultimo, ubi coeunt AB & $h k$, ut AB . Et simili argumento erunt



rent $Kk - Ll, Ll - Mm$, &c. ut $h k$, $l l$ &c. Linearum igitur $AB, h k, Ll, Mm$ quadrata sunt ut earundem differentie, & ideo cum quadrata velocitatum fuerint etiam ut ipsarum differentia, similis erit ambarum progressio. Quo demonstrato, consequens est etiam ut atrox his lineis descripta sint in progressionem continuam cum spatia quae velocitatis describuntur. Ergo si velocitas initio primi temporis Ab exponatur per lineam Ab , & velocitas initio secund $h l$ per lineam $h k$, & longitudo primo tempore descripta per arcum $A h k B$, velocitates omnes subsequentes exponantur per lineas subsequentes Ll, Mm , &c. & longitudines descriptae per areas $h l, l m$, &c. & compositae, si tempus totum exponatur per summam partium suarum AM , longitudo tota descripta exponetur per summam partium suarum $AMmB$. Concipe jam tempus AM ita divisi in parte An , Kl , Lm , &c. ut fiat Ca, Ch, Cl, Cm , &c. in progressionem Geometricam, & erunt partes illae eadem progressionem, & velocitates $Ab, h k, Ll, Mm$, &c. in progressionem eadem inverta, atque spatia descripta $Ak, h l, Lm$, &c. aequalia $Q P D$.

Corol. 1. Pater ergo quod si tempus exponatur per Asymptotam partem quamvis AD , & velocitas in principio temporis per ordinatam applicatam Ab , velocitas in fine temporis exponatur per ordinatam DC , & partem totam descriptam per arcum Hyperbolicam adjacentem $ABGD$, necnon spatium quod corpus a quod eodem tempore AD , velocitate prima Ab , in Medio non resistente describere possit, per rectangulum $Ab \times AD$.

Corol. 2. Unde datur spatium in Medio resistente descriptum, capiENDO illud ad spatium quod velocitate uniformi AB in Medio non resistente describi posset, ut est area Hyperbolica $ABGD$ ad rectangulum $AB \times AD$.

Corol. 3. Datur etiam resistentia Medii, statuendo eam ipso motus ratio aequali esse vi uniformi centripetæ, quæ, in cadente corpore, tempore AC , in Medio non resistente, generare posset velocitatem AB . Nam si ducatur $b l$ quæ tangat Hyperbolam

in B , & occurrat Asymptoto in T , recta AT aequalis erit ipsi AC , & tempus exponet quo resistentia prima uniformiter continuata tollere posset velocitatem totam AB .

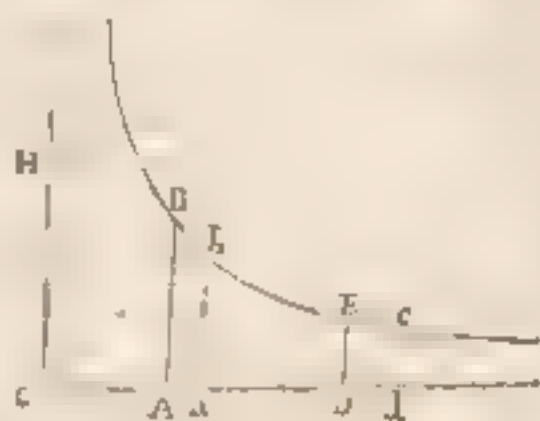
Corol. 4. Et inde datur etiam proportio huius resistentiae ad vim gravitatis, aliamve quamvis datam vim centripetam.

Corol. 5. Et viceversa, si datur proportio resistentiae ad datam quamvis vim centripetam datur tempus AC , quo vis centripeta resistentiae aequalis generare possit velocitatem quamvis AB , & inde datur punctum B per quod Hyperbola Asymptoto CT , CD describi debeat, ut & spatium $ABCD$, quod corpus incipiendo motum suum cum velocitate illi AB , tempore quovis AD , in Medio simili retinente describere possit.

Prop. VI. Theor. IV.

Corpora Sphaerica homogenea & aequalia, resistentia in duplicata ratione elevationum impetusa, & totis viribus insulae motua, temporibus per hanc reciprocis ut velocitates sub unitate, & vibrant tempore aequalia spatia, & amittunt partes velocitatum proportionales totis.

Asymptoto rectae CH ubi CD CH descripta Hyperbola quavis $BbEe$ secante perpendicularia AB, ab, DE, de , in B, b, E, e , exponantur velocitates initiales per perpendicularia AB, DE , & tempora per lineas Aa, Dd . Est ergo ut Aa ad Dd ita (per Hypothesin) DE ad AB , & ita (ex natura Hyperbolae) CA ad CD ; & componendo, ita Ca ad Cd ita ergo area $Abba, DLea$, hoc est spatia descripta aquantur inter se, & velocitates primae AB ,



AB, DE sunt ultimus *ab, de*, & propterea (dividendo) partibus etiam suis amillis *AB-ab, DE-de* proportionales. Q. E. D.

Prop. VII. Theor. V.

Corpora Sphaerica quibus resistitur in duplicata ratione velocitatum, temporibus quae sunt ut motus primi directe & resistentiae primae inverse, amittent partes motuum proportionales totis, & spacia describent temporibus istis in velocitates primas ductis proportionalia.

Namq; motuum partes amittit sicut ut resistentiae & tempora conjunctim. Igitur ut partes illae sint totis proportionales, debet resistentia & corpus conjunctim esse ut motus. Proinde tempus erit ut Motus directe & resistentia inverse. Quare temporum partibus in ea ratione sumptis, corpora amittent semper partes illas motuum proportionales totis, adeoque retinebunt velocitates in ratione prima. Et ob datam velocitatum rationem, describent semper spacia quae sunt ut velocitates prima & tempora conjunctim. Q. E. D.

Corol. 1. Igitur si aequalia corpora resistuntur in duplicata ratione diametrorum, Globi homogenei quibuscumque, cum velocitatibus moti, describent do spacia diametris suis proportionalia, amittent partes motuum proportionales totis. Motus enim Globi cujuscumque erit ut eius velocitas & Massa conjunctim, id est ut velocitas & cubus diametri, resistentia (per Hypothesin) erit ut quadratum diametri & quadratum velocitatis conjunctim, & tempus (per hanc Propositionem) est in ratione prioris directe & ratione posterioris inverse, id est ut diameter directe & velocitas inverse, adeoque spatium (tempori & velocitati proportionale) est ut diameter.

Corol. 2. Si aequalia corpora resistuntur in ratione scilicet altera diametrorum: Globi homogenei quibuscumque, cum velocitatibus moti, describendo spacia in scilicet altera ratione diametrorum,

rum, amittent partes motuum proportionales totis. Nam tempus augetur in ratione resistentiæ diminutæ, & spatium augetur in ratione temporis.

Corol. 3. Et universaliter, si æquavelocia corpora resistuntur in ratione dignitatis cujuscunque diametrorum, spatia quibus Globi homogenei, quibuncunque, cum velocitatibus moti, amittent partes motuum proportionales totis, erunt ut cubi diametrorum ad dignitatem illam applicata. Sinto diametri D & E , & si resistentiæ sint ut D^n & E^n , spatia quibus amittent partes motuum proportionales totis, erant ut D^{3-n} & E^{3-n} . Igitur describendo spatia ipsi D^{3-n} & E^{3-n} proportionalia, retinebunt velocitates in eadem ratione ad invicem ac sub ratio.

Corol. 4. Quod si Globi non sint homogenei, spatium a Globo densiore descriptum augeri debet in ratione densitatis. Motus enim sub pari velocitate major est in ratione densitatis, & tempus (per hanc Propositionem) augetur in ratione motus directe, ac spatium descriptum in ratione temporis.

Corol. 5. Et si Globi moveantur in Medis diversis, spatium in Medio, quod ceteri partibus magis resistit, diminuendum erit in ratione majoris resistentiæ. Tempus enim (per hanc Propositionem) diminuetur in ratione resistentiæ, & spatium in ratione temporis.

Lemma II.

Momentum Gentæ æquatur momentis Terminorum singulorum generantium in eundem laterum indices dignitatum & coefficientia continue ductis.

Gentam voco quantitatem omnem quæ ex Terminis quibuscunque in Arithmetica per multiplicationem, divisionem & extractionem radicum, in Geometria per inventionem vel contentorum & laterum, vel extremarum & mediarum proportionalium absque additione & subtractione generatur. Ejusmodi quantitates

Cas. 1. Rectangulum quodvis motu perpetuo auctum AB , ubi de lateribus A & B decerant momentorum dimidia $\frac{1}{2}a$ & $\frac{1}{2}b$, fuit $A - \frac{1}{2}a$ in $B - \frac{1}{2}b$, seu $AB - \frac{1}{2}aB - \frac{1}{2}Ab + \frac{1}{4}ab$, & quam primum latera A & B alteris momentorum dimidiis aucta sunt, evadit $A + \frac{1}{2}a$ in $B + \frac{1}{2}b$ seu $AB + \frac{1}{2}aB + \frac{1}{2}Ab + \frac{1}{4}ab$. De hoc rectangulo subducatur rectangulum prius, & manebit excessus $aB + Ab$. Igitur laterum incrementis totis a & b generatur rectanguli incrementum $aB + Ab$. Q. E. D.

Cas. 2. Ponatur AB aequale G , & contenti ABC seu GC momentum (per *Cas. 1.*,) erit $gC + Gc$, id est (si pro G & g scribantur AB & $aB + Ab$) $aBc + Abc + ABc$. Et par est ratio contenti sub lateribus quocunque. Q. E. D.

Cas. 3. Ponantur A, B, C aequalia, & ipsius A , id est rectanguli AB , momentum $aB + Ab$ erit $2aA$, ipsius autem A' , id est contenti ABC , momentum $aBc + Abc + ABc$ erit $3aA'$. Et eodem argumento momentum dignitatis cuiuscunque A^n est naA^{n-1} . Q. E. D.

Cas. 4. Unde cum $\frac{1}{A}$ in A sit 1, momentum ipsius $\frac{1}{A}$ ductum in A , una cum $\frac{1}{A}$ ducto in a erit momentum ipsius 1, id est nihil. Proinde momentum ipsius $\frac{1}{A}$ seu A^{-1} est $-\frac{a}{A^2}$. Et generaliter cum $\frac{1}{A^n}$ in A^n sit 1, momentum ipsius $\frac{1}{A^n}$ ductum in A^n una cum $\frac{1}{A^n}$ in naA^{n-1} erit nihil. Et propterea momentum ipsius $\frac{1}{A^n}$ seu A^{-n} erit $-\frac{na}{A^{n+1}}$. Q. E. D.

Cas. 5. Et cum A^1 in A^1 sit A , momentum ipsius A^1 in $2A^1$ erit a , per *Cas. 3.* ideoque momentum ipsius A^1 erit $\frac{a}{2A^1}$ five

$2aA^{-1}$. Et generaliter si ponatur $A^{\frac{m}{n}}$ æquale B , erit A^m æquale B^n , ideoq; maA^{m-1} æquale nbB^{n-1} , & maA^{m-1} æquale nbB^{-1} seu $\frac{nb}{A^{\frac{m}{n}}}$, adeoq; $\frac{m}{n}aA^{\frac{m-n}{n}}$ æquale b , id est æquale momento ipsius $A^{\frac{m}{n}}$. Q. E. D.

Cas. 6 Igitur Genitæ cujuscunq; $A^m B^n$ momentum est momentum ipsius A^m ductum in B^n , una cum momento ipsius B^n ducto in A^m , id est $maA^{m-1} + nbB^{n-1}$, idq; siue dignitarum indices m & n sint integri numeri vel fracti, siue affirmativi vel negativi. Et par est ratio contenti sub pluribus dignitatibus. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc in continue proportionalibus, si terminus unus datur, momenta terminorum reliquorum erunt ut idem termini multiplicati per numerum intervallorum inter ipsos & terminum datum. Sicut A, B, C, D, E, F continue proportionales, & si detur terminus C , momenta reliquorum terminorum erunt inter se ut $-2A, -B, D, 2E, 3F$.

Corol. 2. Et si in quatuor proportionalibus duæ medæ dentur, momenta extremarum erunt ut eadem extremæ. Idem intelligendum est de lateribus rectanguli cujuscunq; dati.

Corol. 3. Et si summa vel differentia duorum quadratorum detur, momenta laterum erunt reciproce ut latera.

Scholium.

In literis quæ mihi cum Geometra peritissimo G. G. Leibnitio annis abhinc decem intercedebant, cum significarem me compotem esse methodi determinandi Maximas & Minimas, ducendi
Tan-

Tangentes, & similia peragendi, quæ in terminis surdis æque ac in rationalibus procederet, & literis transpositis. hanc sententiam involventibus [Data æquatione quocumq; fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire, & vice versa] eandem celarem receptit Vir Clarissimus se quoq; in ejusmodi methodum incidisse, & methodum suam communicavit a mea vix abludentem præterquam in verborum & notarum formalis. Utriusq; fundamentum continetur in hoc Lemmate.

Prop. VIII. Theor. VI.

Si corpus in Medio uniformi, Gravitate uniformiter agente, recta ascendat vel descendat, & spatium totum descriptum distinguatur in partes æquales, inq; principis singularium partium (audendo resistentiæ M de ad vim gravitatis, quando corpus ascendit, vel subducendo ipsam quando corpus descendit) colantur vires absolute, dico quod vires illæ absolute sunt in progressionē Geometrica

Exponatur enim vis gravitatis per lineam horizontalem AC , resistentiæ per lineam indefinitam AK , vi absoluta in descensu corporis per differentiam AC , velocitas corporis per lineam AP (quæ sit media proportionalis inter AK & AC , id est, in dandiata ratione resistentiæ generamenti relictæ data temporis particula factum per lineolam KI , & contemporaneum velocitatis incrementum per lineolam PQ , & certo C Asymptotis rectangulis CA , CH describatur Hyperbola quæ viis BNS , erectis perpendicularibus AB , KN , LO , PK , QS occurrentibus in B , N , O , R , S . Quoniam AK est ut AP^2 , erit huius momentum KL ut illius momentum $2APQ$, id est ut AP in KC . Nam velocitatis incrementum PQ , per motus Leg. 2. proportionale est vi generanti AC . Componatur ratio ipsius KL cum ratione ipsius KN , & fiet rectangulum $KL \times KN$ ut $AP \times AC \times KN$, hoc est, ob datum rectangulum $KC \times KN$, ut AP . Atqui area Hyperbolæ KN .

Corol. 1. Hinc si spatium descriptum exponatur per aream Hyperbolicam $ABNH$; exponi possunt vis gravitatis, velocitas corporis & resistentia Medii per lineas AC , AP & AK respective; & vice versa.

Corol. 2. Et velocitatis maximæ, quam corpus infinitum descendendo potest unquam acquirere, exponens est linea AC .

Corol. 3. Igitur si in data aliqua velocitate cognoscatur resistentia Medii, invenietur velocitas maxima, sumendo ipsam ad velocitatem illam datam in dimidiata ratione, quam habet vis Gravitatis ad Medii resistentiam illam cognitam.

Corol. 4. Sed & particula temporis, quo spatii particula quam minima $NKLO$ in descensu describitur, est ut rectangulum $KN \times PQ$. Nam quoniam spatium $NKLO$ est ut velocitas ducta in particulam temporis, erit particula temporis ut spatium illud applicatum ad velocitatem, id est ut rectangulum quam minimum $KN \times KL$ applicatum ad AP . Erat supra KL ut $AP \times PQ$. Ergo particula temporis est ut $KN \times PQ$, vel quod perinde est, ut $\frac{PQ}{CK}$. Q. E. D.

Corol. 5. Eodem argumento particula temporis, quo spatii particula $nklo$ in ascensu describitur, est ut $\frac{PQ}{CK}$.

Prop. IX. Theor. VII

Positis jam demonstratis, dico quod si Tangentes angulorum sectoris Circularis & sectoris Hyperbolici sumantur velocitatibus proportionales, existente radio justæ magnitudinis, erit tempus omne ascensus futuri ut sector Circularis, & tempus omne descensus præteriti ut sector Hyperbolæ.

Rectæ AC , qua vis gravitatis exponitur, perpendicularis & æqualis ducatur AD . Centro D semidiametro AD describatur tum circuli Quadrans AIE , tum Hyperbola rectangula AVZ
axem

VIII. Lib. II. ut particula temporis incremento velocitatis PQ respondens. Et componendo ut summa particularum temporis, quibus omnes velocitatis AP particula PQ generantur, ut summa particularum Sectoris ADI , id est tempus totum ut Sector totus. $Q. E. D.$

Corol. 1. Hinc si AB æquetur quartæ parti ipsius AC , spatium $ABRP$, quod corpus tempore quovis ATD cadendo describit, erit ad spatium quod eo posset simile velocitatis maxime AC , eodem tempore uniformiter prætereundo describere potest, ut area $ABRP$, qua spatium ead. modo descriptum exponitur, ad area $n. ATD$ qua tempus exponitur. Nam cum sit AC ad AP ut AP ad Ah , erit $2APQ$ æquale $AC \times hL$ (per Corol. 1. Lem. II. huius) adeoque hL ad PQ ut $2AP$ ad AC , & inde LhN ad $PQ \times AD$ seu DPQ ut $2AP \times hN$ ad $AC \times AD$. Sed erat DPQ ad DTV ut Ch ad AC . Ergo ex æquo LKN est ad DTV ut $2AP \times KN \times CK$ ad $AC \text{ cub.}$, id est, ob æquales ChN & ACq , ut AP ad AC , hoc est ut velocitas corporis cadentis ad velocitatem maximam quam corpus cadendo potest acquirere. Cum igitur arearum $ABhN$ & ATD momenta LhN & DTV sunt ut velocitates, erunt arearum illarum partes omnes simul æmæ ut spatia simul descripta, id est, areæ totæ ab initio genitæ $ABhN$ & ATD ut spatia tota ab initio decedens descripta. $Q. E. D.$

Corol. 2. Idem consequitur etiam de spatio quod in ascensu describitur. Nimirum quod spatium illud omne sit ad spatium, uniformi cum velocitate AC eodem tempore descriptum, ut est area $ABnK$ ad Sectorem ADI .

Corol. 3. Velocitas corporis tempore ATD cadentis est ad velocitatem quam eodem tempore in spatio non resistente acquireret, ut triangulum APD ad Sectorem Hyperbolicum ATD . Nam velocitas in Medio non resistente foret ut tempus ATD , & in Medio resistente est ut AP , id est ut triangulum APD . Et velocitates illæ initio descensus æquantur inter se, perinde ut areæ illæ ATD , APD .

Corol. 4. Eodem argumento velocitas in ascensu est ad velocitatem, qua corpus eodem tempore in spatio non resistente omnem suum ascendendi motum amittere possit, ut triangulum APD ad Sectorem circulare AtD , sive ut recta Ap ad arcum At .

Corol. 5. Est igitur tempus quo corpus in Medio resistente cadendo velocitatem AP acquirit, ad tempus quo velocitatem maximam AC in spatio non resistente cadendo acquirere possit, ut Sector ADI ad triangulum ADC . & tempus, quo velocitatem Ap in Medio resistente ascendendo possit amittere, ad tempus quo velocitatem eandem in spatio non resistente ascendendo possit amittere, ut arcus At ad ius Tangentem Ap .

Corol. 6. Hinc ex dato tempore datur spatium ascensu vel descensu descriptum. Nam corporis in infinitum descendens datur velocitas maxima, per *Corol. 2. & 3. Theor. VI, Lib. II.* indeq, datur & spatium quod semille velocitatis illius dato tempore describi potest, & tempus quo corpus velocitatem illam in spatio non resistente cadendo possit acquirere. Et si nundo Sectorem ADI vel ADt ad triangulum ADC in ratione temporum, dabitur tum velocitas AP vel Ap , tum area $ABK N$ vel $ABkn$, quæ est ad Sectorem ut spatium quadraticum ad spatium jam ante inventum.

Corol. 7. Et regrediendo, ex dato ascensus vel descensus spatio $ABn k$ vel $ABN k$, dabitur tempus ADt vel ADI .

Prop. X. Prob. III.

Tendat uniformis vis gravitatis directe ad planum Horizontis, sitq, resistentia in medio densitas & quadratum velocitatis conjunctim requiratur tum Medii densitas in locis singulis, quæ faciat ut corpus in data quavis linea curva moveatur, tum corporis velocitas in iisdem locis.

Sit AK planum illud plano Schematis perpendiculare; ACK linea curva, C corpus in ipsa motum, & Fcf recta ipsam tangens

& resistentia progredientis ipso motus initio æquantur, adeoque
 & ipsis proportionales $\frac{bf}{fg}$ & $\frac{HF}{FG}$ æquantur, & propterea ob æ-
 quales fg & FG , æquantur etiam bf & HF , suntq; adeo CF ,
 CH (vel Cb) & Cf in progressionē Arithmetica, & ind. HF se-
 midifferentia est ipsarum Cf & CF , & resistentia quæ supra fuit
 ut $\frac{HF}{FG}$, est ut $\frac{Cf - CF}{FG}$.

Est autem resistentia ut Medii densitas & quadratum veloci-
 tatis. Velocitas autem ut descripta longitudo CF directe & tem-
 pus \sqrt{FG} inverse, hoc est ut $\frac{CF}{\sqrt{FG}}$, adeoque quadratum veloci-
 tatis ut $\frac{CF^2}{FG}$. Quare resistentia, ipsi proportionalis $\frac{Cf - CF}{FG}$
 est ut Medii densitas & $\frac{CF^2}{FG}$ conjunctim, & inde Medii densi-
 tas ut $\frac{Cf - CF}{FG}$ directe & $\frac{CF^2}{FG}$ inverse, id est ut $\frac{Cf - CF}{CF^2}$.

Q. E. D.

Corol. 1. Et hinc colligitur, quod si in C capiatur Ck æqualis
 CF , & ad planum horizontale AK demittatur per perichelium
 kI , secans curvam ACK in I , fiet Medii densitas ut $\frac{FG \cdot kI}{CF \times FG + kI}$.
 Erit enim C ad kC ut \sqrt{fg} seu \sqrt{FG} ad \sqrt{kI} , & divisim f ad
 kC , id est $Cf - CF$ ad CF ut \sqrt{FG} ad \sqrt{kI} , hoc est (si
 ducatur terminus uterq; in $\sqrt{FG} + \sqrt{kI}$) ut $FG - kI$ ad $kI +$
 $\sqrt{FG} \times kI$, live ad $FG + kI$. Nam ratio prima nascentium kI
 $+ \sqrt{FG} \times kI$ & $FG + kI$ est æqualitatis. Scribatur itaq;
 $\frac{FG - kI}{FG + kI}$ pro $\frac{Cf - CF}{CF}$; & Medii densitas, quæ fuit ut $\frac{Cf - CF}{CF^2}$
 evadet ut $\frac{FG - kI}{CF \times FG + kI}$.

Corol.

Corol. 2. Unde cum 2 HF & CF - CF aquantur, & FG & kl (ob rationem æqualitatis) component 2 FG, erit 2 HF ad CF ut FG - kl ad 2 FG, & inde HF ad FG, hoc est resistentia ad gravitatem, ut rectangulum CF in FG - kl ad 4 FG quad.

Corol. 3. Et hinc si curva linea definatur per relationem inter basem seu abscissam AB & ordinatim applicatam BC, (ut moris est) & valor ordinatim applicatæ resolvatur in seriem convergentem: Problema per primos series terminos expedite solvetur: ut in Exemplis sequentibus.

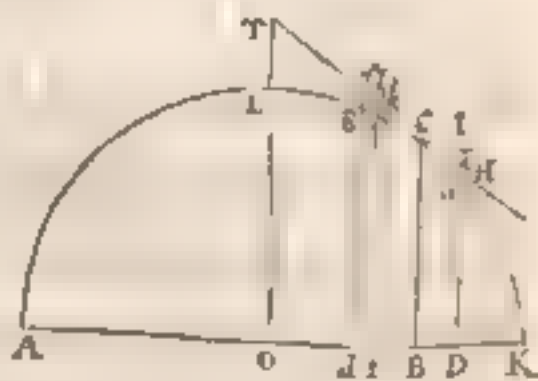
Exempl. 1. Sit Linea ACK semicirculus super diametro AK descriptus, & requiratur Modus dentis quæ faciat ut Projectile in hac linea moveatur.

Bisectetur semicirculi diameter AK in O, & dic OK n, OB a, BC e, & BD vel Ba o & erit DG q. seu OG q. - OD q. æquale $nn - aa - 2ao - oo$ seu $ee - 2ao - oo$, & radice per methodum nostram extracta, fiet DG = e - $\frac{ao}{e} - \frac{oo}{2e} - \frac{4ooo}{2e^3} -$

$\frac{ao^3}{2e^3} - \frac{a^3o^3}{2e^3}$ &c. Hic scribatur nn pro ee + aa & evadet DG

$= e - \frac{ao}{e} - \frac{nnooo}{2e^3} - \frac{nnnoo}{2e^3}$ &c.

Huiusmodi Series distinguo in terminos successivos in hunc modum. Terminum primum appello in quo quantitas infinitæ parva o non extat; secundum in quo quantitas illa extat unius dimensionis; tertium in quo extat duarum, quartum in quo trium est, & sic in infinitum. Et primus terminus, qui hic est e, denotabit semper longitudinem ordinatæ BC insistentis ad indefinitæ quantitatæ initium B, secundus terminus



nus qui hic est $\frac{4a}{e}$, denotabit differentiam inter BC & DF , id est lineolam IF quæ abscinditur complendo parallelogrammum BC . ID , atq; adeo positionem Tangentis CF semper determinat. ut in hoc casu capiendo IF ad IC ut est $\frac{4a}{e}$ ad 0 seu a ad c . Terminus tertius, qui hic est $\frac{8a^2}{2e^2}$ designabit lineolam FG , quæ jacet inter Tangentem & Curvam, adeoq; determinat angulum contactus FCG , seu curvaturam quam curva linea habet in C . Si lineola illa FG finitæ est magnitudinis, designabitur per terminum tertium una cum subsequenribus in infinitum. At si lineola illa minuatur in infinitum, terminum subsequentes evadent infinite minores tertio, adeoq; negligi possunt. Terminus quartus, qui hic est $\frac{8a^3}{2e^3}$, exhibet variationem Curvaturæ, quintus variationem variationis, & sic deinceps. Unde obiter patet usus non contemnendus harum Serierum in solutione Problematum, quæ pendent a Tangentibus & curvatura Curvarum.

Præterea CF est latus quadratum ex CIq & IFq hoc est ex BDq & quadrato termini secundi. Estq; $FG + kl$ aequalis duplo termini tertii, & $FG - kl$ aequalis duplo quarti. Nam valor ipsius DC convertitur in valorem ipsius cl , & valor ipsius FG in valorem ipsius kl , scribendo B pro BD , seu -0 pro $+a$. Promde cum FG sit $-\frac{8a^2}{2e^2} - \frac{8a^3}{2e^3}$ &c. erit $kl = -\frac{8a^2}{2e^2} + \frac{8a^3}{2e^3}$ &c. Et horum summa est $-\frac{8a^2}{e^2}$, differentia $-\frac{8a^3}{e^3}$.

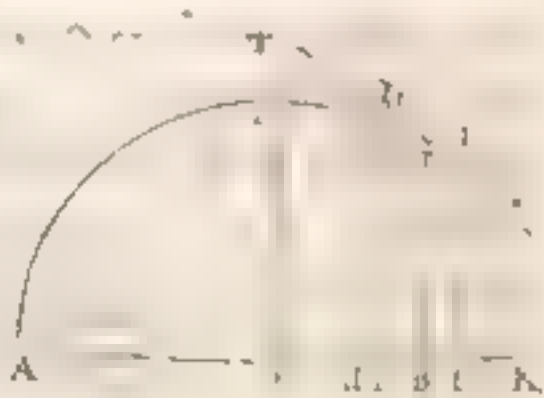
Terminum quintum & sequentes hic negligo, ut infinite minores quam qui in hoc Problemate considerandi veniant. Itaq; si designetur Series universaliter his terminis $+Q_0 - R_{00}$ $50'$ &c. erit CF aequalis $\sqrt{00 + 2Q_{00}}$, $FG + kl$ aequalis $2R_{00}$, & $FG - kl$ aequalis $250'$. Pro CF , $FG + kl$ & $FG - kl$ scribantur
 III

hi earum valores, & Medii densitas quæ erat ut $\frac{FG - KI}{CF \text{ in } FG + KI}$

jam fiet ut $\frac{S}{R \sqrt{1 + 2QR}}$ Deducendo igitur Problema antiquum, quodq. ad iterum convergentem, & hoc pro Q , R & S scribendo terminos seriei ipsi respondentes, deinde etiam ponendo resistentiæ Medii in loco quovis G esse ad Gravitationem ut $\sqrt{1 + 2QR}$ ad $2R$, & velocitatem esse illam ipsam quæcum corpus, de loco C secundam rectam CF egrediens, in Parabola, diametrum CB & latus rectum $\frac{1 + 2QR}{R}$ habente, deinceps moveri possit, solvetur Problema.

Sic in Problemate jam solvendo, si scribantur $\sqrt{1 + \frac{a^2}{c^2}}$ seu $\frac{n}{c}$ pro $\sqrt{1 + 2QR}$, $\frac{n^2}{2c^2}$ pro R , & $\frac{a^2 n^2}{2c^2}$ pro S , prodibit Medii densitas ut $\frac{a}{n^2}$, hoc est (ob datam n) ut $\frac{a}{c}$ seu $\frac{OB}{BC}$, id est ut Tangentis longitudo illa CT , quæ ad semidiametrum OL ipsi AK normaliter insistentem terminatur, & resistentiæ erit ad gravitationem ut a ad n , id est ut OB ad circuli semidiametrum OK , velocitas autem erit ut $\sqrt{2}BC$. Igitur si corpus C certa cum velocitate, secundum lineam ipsi OK parallelam, exeat de loco L , & Medii densitas in singulis locis C sit ut longitudo tangentis CI , & resistentiæ etiam in loco aliquo C sit ad vim gravitatis ut OB ad OK , corpus illud describet circuli quadrantem LCK . Q. E. L.

At si corpus idem de loco A secundum lineam ipsi AK perpen-



pendicularem egrederetur, sumenda esset OB seu a ad contrari-
as partes centri O , & propterea signum eius mutandum esset, &
scribendum $-a$ pro $+a$. Quo pacto prodiret Medii densitas ut

$\frac{a}{c}$. Negativam autem densitatem (hoc est quæ motus cor-
porum accelerat) Natura non admittit, & propterea naturali-
ter fieri non potest ut corpus ascendendo ab A describat circuli
quadrantem AL . Ad hunc effectum deberet corpus a Medio
impellente accelerari, non a resiliante impediri.

Exempl. 2. Sit linea $ALCK$ Parabola, axem habens OL ho-
rizonti AK perpendicularem, & requiratur Medii densitas quæ
faciat ut Projectile in ipsa moveatur.

Ex natura Parabole, rectangulum ADK æquale est rectan-
gulo sub ordinata DG & recta aliqua data: hoc est, si dicen-
tur recta illa b , AB a , AH c , BC e & BD o , rectangulum $a+o$
in $c-a$ seu $a^2 - o^2$ seu $a^2 - 2ao + o^2 - o^2$ æquale est rectangulo b
in DG , adeoque DG æquale $\frac{a^2 - 2ao + o^2}{b}$ seu $\frac{a^2}{b} - \frac{2ao}{b} + \frac{o^2}{b}$. Jam si

hendus esset huius serie secundus terminus $\frac{a^2 - 2ao + o^2}{b}$ pro Q , &

eius coefficientis $\frac{a^2}{b}$ pro Q , tertius item terminus $\frac{o^2}{b}$ pro R &
& eius coefficientis $\frac{1}{b}$ pro R . Cum vero plures non sint termini,
debebit quartus terminus So coefficientis S evanescere, & propterea

quantitas $R \sqrt{1 + \frac{QR}{R}}$ cui Medii densitas proportionalis est, ni-
hil erit. Nulla igitur Medii densitate movebitur Projectile in
Parabola, uti olim demonstravit *Galilæus*. Q F I

Exempl. 3. Sit linea AGK Hyperbola, Asymptoton habens
 NX plano horizontali AK perpendicularem; & queratur Me-
dii densitas quæ faciat ut Projectile moveatur in hac linea

Sit MX Asymptotos altera, ordinatim applicata DG pro-

ductæ

in Regula superiore, pro Q, R & S . Quo facto prodit medi densitas

$$\text{ut } \frac{\frac{bb}{a} \sqrt{1} - \frac{mm}{nn} - \frac{2mb}{n+1} + \frac{b^2}{a^2}}{\frac{aa + \frac{mm}{nn} - \frac{2mb}{n} + \frac{b^2}{a^2}}}{\text{seu } \frac{I}{\sqrt{aa + \frac{mm}{nn} - \frac{2mb}{n} + \frac{b^2}{a^2}}}} \text{ id}$$

est, si in $I Z$ sumatur $I Y$ equali $I G$, ut $\frac{I}{X Y}$. Namq, aa & $\frac{mm}{nn}$

$aa - \frac{2mb}{n} + \frac{b^2}{a^2}$ sunt ipsarum $X Z$ & $Z Y$ quadrata. Resisten-
tia autem invenitur in ratione ad Gravitatem quam habet $X Y$
ad $I G$, & velocitas ea est qualem corpus in Parabola pergeret
verticem G diametrum $D G$ & latus rectum $\frac{T X}{I G}$ habente.

Ponatur itaq, quod Medi densitates in locis singulis G sint reci-
proce ut distantie $X Y$, quodq, rectum nris in loc. aliquo G sit ad
gravitatem ut $X Y$ ad $I G$, & corpus ex vert. A alta cum velocitate
emissum describet Hyperbolam illam $A G H, Q F I$.

Exempl 4. Ponatur indefinite, quod linea $A G H$ Hyperbola
sit centri $X A$ in pte $A X$ a sepe descripta, ut con-
structo rectangulo $X Z P N$ cuius latus $Z D$ secet Hyperbolam
in G & Asymptoton eius in I , fuerit $P G$ reciproce ut ipsius
 $Z X$ vel $D N$ di. sua alip. $N D$ cuius index est numerus n &
quaratur Medi densitas, qua P consistit pro. radiatur in hac curva.

Pro $D N, L D, A X$ tribuantur A, O, C respective, sitq, $I Z$
ad $Z X$ vel $D N$ ut d ad e , & $A G$ aqualis $\frac{b^2}{L X}$, & erit $D N$ a qua-
li $A - C, A G = \frac{b^2}{A - O}, A Z = \frac{d}{e}$ in $A - O$, & $C D$ seu $N X - A Z$

$A G$ aquali $C - \frac{d}{e} A + \frac{b^2}{e} O - \frac{b^2}{A - O}$. Resolvatur terminus ille
in seriem infinitam $\frac{b^2}{A^n} + \frac{n b^2 O}{A^{n+1}} + \frac{n n + n}{2 A^{n+2}} b b O^2 +$
 $+ \frac{n + n n + n}{6 A^{n+3}} b b O^3$ &c. ac fiet $C D$ aqualis $C - \frac{d}{e} A - \frac{b^2}{A^n} +$

$+ \frac{d}{e} O = \frac{nnb}{A^{n+1}} O = \frac{nn+n}{2A^{n+1}} bb O' = \frac{n^2 + 3nn + 2n}{6A^{n+1}} bb O' &c.$ Hujus

seriei terminus secundus $\frac{d}{e} O = \frac{nnb}{A^{n+1}} O$ usurpandus est pro Qo ,

tertius $\frac{nn+n}{2A^{n+1}} bb O'$ pro $R o'$, quartus $\frac{n^2 + 3nn + 2n}{6A^{n+1}} bb O'$ pro

$S o'$. Et inde Medii densitas $\frac{1}{R \times \sqrt{1 + \frac{Q Q}{R R}}}$, in loco quovis G , sit

$$\frac{1}{3\sqrt{A^2 + \frac{d^2}{e^2} A^2}} = \frac{1}{3\sqrt{A^2 + \frac{nn+n}{2A^{n+1}} A^2 + \frac{nnn}{A^{n+1}} A^2}}$$

aequalis $n \times PG$ est res proce ut XY . Sunt enim A & $\frac{dd}{e^2} A = \frac{2d \times hh}{e A^n}$

in $A + \frac{nnb}{A^{2n}}$ spiarum XZ & ZI quad. ata. Resistentia autem in

eodem loco G sit ad Gravitationem ut $\sin \frac{AZ}{A}$ ad $2RR$, id est XY ad

$\frac{3nn + 3n}{n+2} PG$. Et velocitas ibidem eadem quae sit quacum corpus pro-

jectum in Parabola pergeret, vertice in C , diametrum GD & La-

tus rectum $\frac{1 + \frac{Q Q}{R R}}{R}$ seu $\frac{AZ \times A}{nn + n \text{ in } PG}$ habere. Q. E. I.

Scholium.

Quoniam motus non sit in Parabola nisi in Medio non resis-
tente, in Hyperbolis vero hic descriptis sit per resistentiam per-
petuam periculum est quod linea, quam Procrante in Medio
uniformiter resistente describit, propriis accedit ad Hyperbolas
haec quam ad Parabolam. Est utiq; linea illa Hyperbolici ge-
neris, sed quae circa verticem magis distat ab Asymptotis, in
partibus a vertice remotioribus propriis ad ipsas accedit quam
pro ratione Hyperbolarum quas hic describit. Tanta vero non
est

est inter has & illam differentia, quin illius loco possint hæ in rebus practis non incommode adhiberi. Et utiles forsitan futuræ sunt hæ, quam Hyperbola magis accurata & simul magis composita. Ipsa vero in ulum sic deducuntur.

Compleatur parallelogrammum $XTGI$, & ex natura harum Hyperbolarum facile colligitur quod recta GI tangit Hyperbolam in G , ideoq. densitas Medii in G est reciproce ut tangens GI , & velocitas ibidem ut $\sqrt{\frac{GT}{GI}}$, resistentia autem ad vim gravitatis ut GT ad $\frac{3n+3}{n+2} GV$.

Præinde si corpus de loco A secundum rectam AH projectum describat Hyperbolam AGh , & AH producta occurrat Asymptoto NX in H , atq. AI occurrat alteri Asymptoto MX in I erit Medii densitas in A reciproce ut AH , & corporis velocitas ut $\sqrt{\frac{AH}{AI}}$, ac resistentia ibidem ad Gravitationem ut AH ad $\frac{3n+3}{n+2}$ in AI . Unde prodeunt sequentes Regule.

Reg. 1. Si servetur Medii densitas in A & mutetur angulus NAH , manebunt longitudines AH , AI , HX . Id. eq. si longitudines illæ in aliquo casu inveniantur, Hyperbola deinceps ex dato quovis angulo NAH expedite determinari potest.

Reg. 2. Si servetur tum angulus NAH tum Medii densitas in A , & mutetur velocitas quam corpus projicitur, servabitur longitudo AH , & mutabitur AI in duplicata ratione velocitatis reciproce.

Reg. 3. Si tam angulus NAH quam corporis velocitas in A , gravitaq. acceleratio servetur, & proportio resistentiæ in A ad gravitationem motricem augeatur in ratione quacunque: augebitur proportio AH ad AI in eadem ratione, manente Parabolæ latere recto, ut proportionali longitudine $\frac{AH}{AI}$, & propterea minuetur AH in eadem ratione, & AI minuetur in ratione illa duplicata.

plicata. Augetur vero proportio resistentiæ ad pondus, ubi vel gravitas specifica sub æquali magnitudine sit minor, vel Medii densitas major, vel resistentiæ, ex magnitudine diminuta, diminuitur in minore ratione quam pondus.

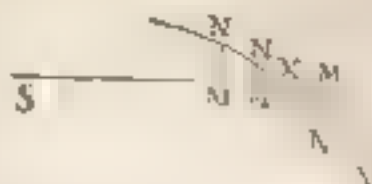
Reg. 4. Quotum densitas Medii prope verticem Hyperbolæ minor est quam in loco A , ut servetur densitas mediocri debet ratio inter tangentem GT ad Tangentem AH inversi, & densitas in A , per Regulam tertiam, ducit in in ratione paulo minore quam in omni Tangentium ad Tangentem AH .

Reg. 5. Si dantur longitudines AH , AI , & describenda sit figura AGH producat HN ad X , ut sit HX æqualis sacro sub $n+1$ & AI centroq. X & Asymptotis MX , NX per punctum A describatur Hyperbola, ea lege ut sit AI ad quavis I G ut XV ad XI .

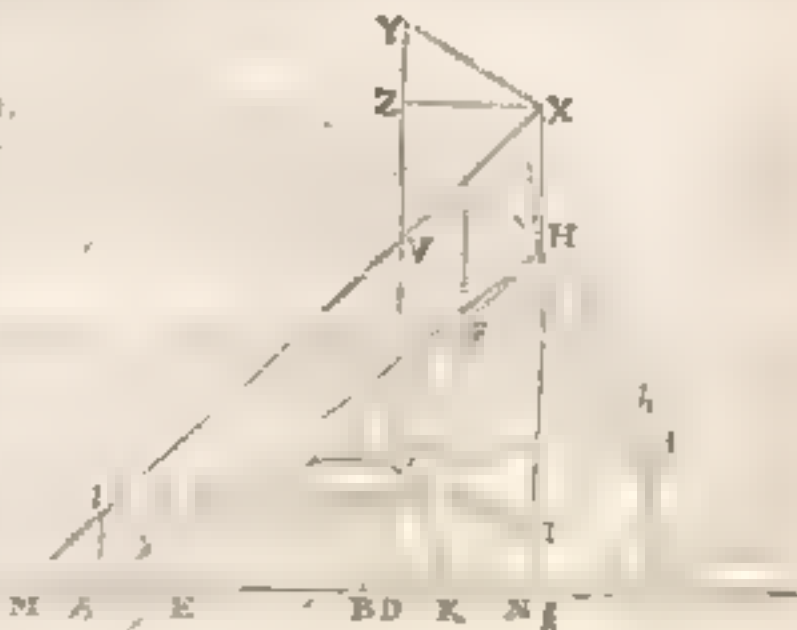
Reg. 6. Quo minor est numerus n , eo magis accurate sunt hæc Hyperbolæ in aleam corpora ab A , & minus accurate in ejus densitas ad G , & contra. Hyperbola Conica mediocrem rationem tenet, estq. ceteris simplicior. Igitur si Hyperbola sit huius generis, & punctum K , ubi corpus projectum incidet in rectam quavis AN per punctum A transcurrentem, queratur occurrat producta AN Asymptotis MX , NX in M & N , & sumatur NK ipsi AM æqualis.

Reg. 7. Et hinc habet methodus expedita determinandi hanc Hyperbolam ex Phasorum. Proiciantur corpora duo similia & æqualia eadem velocitate, in anguli diveris HAK , hAk , incidentq. in planum Horizontis in K & k , & notetur proportio AK ad Ak . Sit ea d ad e . Tum erecto cuiusvis longitudinis perpendicularo AI , atque utcumq. longitudinem AH vel Ah , & inde collige graphice longitudines Ah , Ak , per Reg. 6. Si ratio AK ad Ak sit eadem cum ratione d ad e , longitudo AH recte assumpta fuit. Sin minus cape in recta infinita SM longitudinem SM æqualem assumptæ AH , & erige perpendicularum MN æquale

quale rationum differentiarum $\frac{AK}{Ak} = \frac{d}{e}$ ductæ in rectam quamvis datam. Simili methodo ex assumptis pluribus longitudinibus AH invenienda sunt plura puncta N . & tum demum si per omnia agatur Curva linea regularis NNX . N , hac abinder SX quasi ex longitudini AH æqualem. Ad usu Mechanicos sufficit longitudines AH , AI eadem in angulis omnibus HAK retinere. Sin figura ad invenendam resistentiæ Medi accuratius determinanda sit, corrigendæ sunt semper hæc longitudines per Regulam quartam.

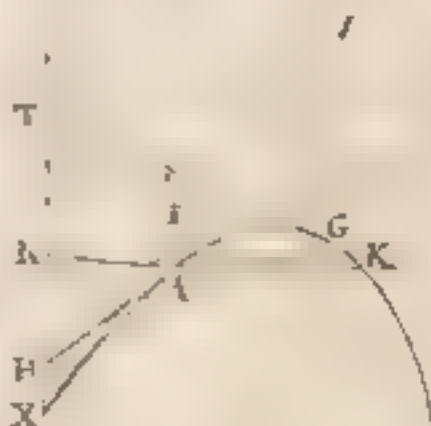


Reg. 8 Invenitis longitudinibus AH , HX , si jam desideretur positio rectæ AH , secundum quam Projectile data illa cum velocitate emissum incidit in punctum quodvis K : ad puncta A & K erigantur rectæ AC , KF horizonti perpendiculares, quarum AC deorsum tandat, & aquetur ipsi AI seu HX Asymptotis A . K , KF describatur Hyperbola conjugata transeat per punctum C , centroq. A & intervallo AH describatur Circulus secans Hyperbolam illam in puncto



puncto H , & projectile secundum rectam AH emissum incidet in punctum K . *Q. E. I.* Nam punctum H , ob datam longitudinem AH , locatur alicubi in circulo descripto. Agatur CH occurrens ipsi AK & KF , illi in C , hinc in F , & ob parallelas CH , MX & æquales AC , AI , erit AE æqualis AM , & propterea etiam æqualis KN . Sed CE est ad AE ut FH ad KN , & propterea CE & FH æquantur. Incidit ergo punctum H in Hyperbolam Asymptotis AK , KF descriptam, cuius coniugata transit per punctum C , atq; adeo reperitur in communi intersectione Hyperbolæ hujus & circuli descripti. *Q. E. D.* Notandum est autem quod hæc operatio perinde se habet, siue recta AKN horizonti parallela sit, siue ad horizontem in angulo quovis inclinata: quodq; ex duabus intersectionibus H , H duo prodeunt anguli NAH , NAH , quorum minor eligendus est, & quod in Praxi mechanica sufficit circulum icnel describere, deinde regulam interminatam CH ita applicare ad punctum C , ut eius pars FH , circulo & rectæ FK interjecta, æqualis sit ejus parti CE inter punctum C & rectam HK sitæ.

Quæ de Hyperbolis dicta sunt facile applicantur ad Parabolas. Nam si $XAGK$ Parabolam designet quam recta XV tangat in vertice X , sintq; ordinatim applicate IA , IG ut quælibet abscissarum XI , XV dignitates XI^2 , XV^2 , agantur XT , TG , HA , quarum XT parallela sit VG , & TG , HA parabolam tangant in G & A : & corpus de loco quovis A , secundum rectam AH productam, iusta cum velocitate projectum, describet hanc Parabolam, si modo densitas Medii, in locis singulis G , sit reciproce ut tangens GT . Velocitas autem in G ea erit quacum Projectile pergeret,



in spatio non resistente, in Parabola Conica, verticem G , diametrum VG deorsum produciam, & latus rectam $v \frac{2TGq}{nn - uXVG}$ habente. Et resistentia in G erit ad vim Gravitatis ut TG ad $\frac{3nn - 3n}{n - 2}VG$. Vnde si NAK lineam horizontalem designet, & manente tum densitate Medij in A , tum velocitate quacum corpus prouenit, mutetur utcumq. angulus NAH , manebunt longitudines AH , AI , HX , & inde datur Parabolæ vertex X , & posito rectæ XI , & sumendo IG ad IA ut XV ad XI , dantur omnia Parabolæ puncta G , per qua Projectile transibit.

S E C T. III.

De motu corporum quæ resistuntur partim in ratione velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicata.

Prop. XI. Theor. VIII.

Si corpus resistitur partim in ratione velocitatis, partim in velocitatis ratione duplicata, & sola ceteris in Medio similiari moveatur, sunt autem tempora in progressionem Arithmetica, quantitates velocitatis recipere proportionales, quædam quantitate æquæ, erunt in progressionem Geometrica.

Centro C , Asymptotis rectangulis ADd & CH describatur Hyperbola $hLeD$, & Asymptoto CH parallele sint AB , DE , &c. In Asymptoto CD dantur puncta A , G . Et si tempus exponatur per arcam Hyperbolæ $ABED$ uniformiter crescentem, dico, quod velocitas exponi potest per longitudinem DE , ceteris reciproca GD una cum data C componat longitudinem CD in progressionem Geometrica crescentem.

vis $ABED$, invenietur punctum G . Eo autem invento, velocitas ex dato quovis alio tempore inveniri potest.

Prop. XII. Theor. IX.

Isdem positis, dico quod si spatia descripta sumantur in progressionem Arithmetica, velocitates data quadam quantitate auctæ erunt in progressionem Geometrica.

In Asymptoto CD detur punctum R , & erecto perpendicularo RS , quod occurrat Hyperbolæ in S , exponatur descriptum spatium per aream Hyperbolicam $RSED$, & velocitas erit ut longitudo GD , quæ cum data CG componit longitudinem CD , in Progressione Geometrica decrefcentem, interea dum spatium $RSED$ augetur in Arithmetica.

Etenim ob datum spatium incrementum $EDde$, linea Dd , quæ decrementum est ipsius GD , erit reciproce ut ED , adeoque directe ut CD , hoc est ut summa ejusdem GD & longitudinis datæ CG . Sed velocitatis decrementum, tempore sibi reciproce proportionali, quo data spatii particula Dde describitur, est ut retinentia & tempus conjunctum, id est directe ut summa duarum quantitatum, quarum una est velocitas, altera ut velocitatis quadratum, & inverse ut velocitas, adeoque directe ut summa duarum quantitatum, quarum una datur, altera est ut velocitas. Igitur decrementum tantum velocitatis quam lineæ GD , est ut quantitas data & quantitas decrefcentis conjunctum, & propter analogia decrefcenti, analogæ temper erunt quantitates decrefcentes, nimirum velocitatis & lineæ GD . $Q.E.D.$

Corol. 1. Igitur si velocitas exponatur per longitudinem GD , spatium descriptum erit ut area Hyperbolica $DLSR$.

Corol. 2. Et si utcumque assumatur punctum R , invenietur punctum G , capiendò GD ad GR ut est velocitas sub initio ad velocitatem post spatium quodvis $ABED$ descriptum. Invento autem puncto G , datur spatium ex data velocitate, & contra.

Corol. 3.

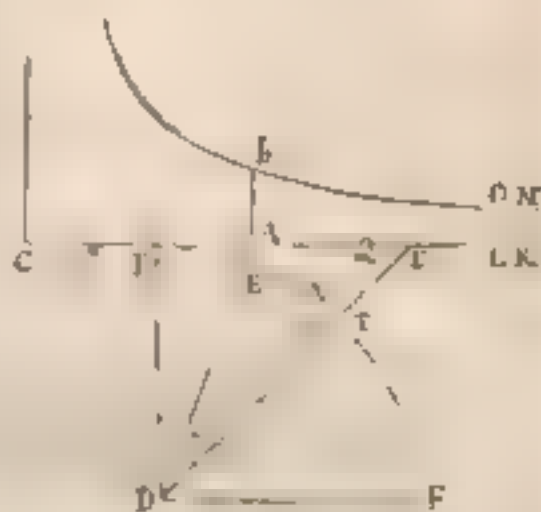
Corol. 3. Unde cum, per Prop. XI. detur velocitas ex dato tempore, & per hanc Propositionem detur spatium ex data velocitate, dabitur spatium ex dato tempore: & contra

Prop. XIII. Theor. X.

Pesito quod corpus ab uniformi gravitate deorsum, aut attractione recta ascendit vel descendit, & resistitur partim in ratione velocitatis, partim in eisdem ratione duplicata: dico quod, si Circuli & Hyperbolæ diametris parallele rectæ per conjugatarum diametrorum terminos ducantur, & velocitates sint ut segmenta quædam parallelarum a dato puncto ducta, Tempora erunt ut arcuum sectores, rectis a centro ad segmentorum terminos ductis abscissi. & contra.

Cas. 1. Ponamus primo quod corpus ascendit, centroque D & semidiametro quovis DB describatur circuli quadrans B E I F, & per semidiametri DB terminum B agatur infinita B A P, semidiametro D F parallela. In ea detur punctum A, & capiatur segmentum A P velocitati proportionale. Et cum resistentiæ pars aliqua sit ut velocitas & pars altera ut velocitatis quadratum, sit resistentia tota in P ut A P quad. + 2 P A B. Jungantur D A, D P circulum secantes in E ac F, & exponatur gravitas per D A quadratum, ita ut sit gravitas ad resistentiam in P ut D A q. ad A P q. + 2 P A B: & tempus ascensus omnis futuri erit ut circuli sector E D I E.

Agatur enim D V Q, abscindens & velocitatis A P momentum P Q, & Sectoris D E I momentum D I V dato temporis momen-



Prop. XIV. Prob. IV.

Isdem positis, dico quod spatium ascensu vel descensu descriptum, est in summa vel differentia areae per quam tempus exponitur, & areae eiusdem alterius quae augeatur vel diminuat in progressionem Arithmetica, si vires ex resistantia & gravitate compositae iungantur in progressionem Geometricam.

Capiatur AC (in Fig. tribus ultimis,) gravitati, & AK resistantiae proportionalis. Capiantur autem ad easdem partes puncta A si corpus ascendit, aliter ad contrarias. Erigatur Ab quae sit ad DB ut $DBq.$ ad $4BAC$ & area $AbNK$ augebitur vel diminuetur in progressionem Arithmetica, dum vires CK in progressionem Geometricam sumuntur. Dico igitur quod distantia corporis ab eius altitudine maxima sit ut excessus areae $AbNK$ supra aream DET .

Nam cum AK sit ut resistantia, id est ut $APq. + 2BAP$; assumatur data quavis quantitas Z , & ponatur AK aequalis $\frac{APq. + 2BAP}{Z}$, & (per huius Lem. II.) erit ipsius AK mo-

mentum KL aequale $\frac{2APQ + 2BA \times PB}{Z}$ seu $\frac{2BPQ}{Z}$, &

areae $AbNK$ momentum $KLON$ aequale $\frac{2BPQ \times LO}{Z}$ seu $\frac{BPQ \times BD \text{ cub.}}{2Z \times CK \times AB}$.

Cas. 1. Jam si corpus ascendit, sitque gravitas ut $ABq. + BDq.$ existente BLI circulo, (in Fig. *Cas. 1. Prop. XIII*) linea AC , quae gravitati proportionalis est, erit $\frac{ABq. + BDq.}{Z}$ & $DPq.$ seu $APq. + 2BAP + ABq. + BDq.$ erit $AK \times Z + AC \times Z$ seu $CK \times Z$ ideoque area DTV erit ad aream DPQ ut $DTq.$ vel $DBq.$ ad $CK \times Z$.

Cas. 2.

Caf. 2. Sin corpus ascendit, & gravitas fit ut $ABq - BDq$.
 linea AC (Fig. *Caf. 2. Prop. XIII*) erit $\frac{ABq - BDq}{Z}$ & DTq .

erit ad DPq . ut DFq . seu DBq . ad $BPq - BDq$. seu APq . +
 $2BAP + ABq - BDq$. id est ad $AK \times Z + AC \times Z$ seu $Ch \times Z$.
 Ideoque area DTV erit ad aream DPQ ut DBq ad $CK \times Z$.

Caf. 3. Et eodem argumento, si corpus descendit, & propterea
 gravitas fit ut $BDq - ABq$ & linea AC (Fig. *Caf. 3. Prop.*
preced.) æquetur $\frac{BDq - ABq}{Z}$ erit area DTV ad aream
 DPQ ut DBq . ad $CK \times Z$: ut supra.

Cum igitur areæ illæ semper sint in hac ratione, si pro area
 DTV , qua momentum temporis sibiinet ipsi semper æquale ex-
 ponitur, scribatur determinatum quodvis rectangulum, puta
 $BD \times m$, erit area DPQ , id est $BD \times PQ$, ad $BD \times m$ ut
 $CK \times m \times Z$ ad BDq . Atque inde fit PQ in BD cub. æquale
 $2BD \times m \times CK \times Z$, & areæ $AbNK$ momentum KLN su-
 perius inventum, fit $\frac{BP \times BD \times m}{AB}$ Auferatur areæ DET mo-

mentum DTV seu $BD \times m$, & restabit $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$. Est igitur
 differentia momentorum, id est momentum differentiarum arearum,
 æqualis $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$, & propterea (ob datum $\frac{BD \times m}{AB}$)

ut velocitas AP , id est ut momentum spatii quod corpus ascen-
 dendo vel descendendo deseruit. Ideoque differentia arearum
 & spatium illud proportionalibus momentis crescentia vel decre-
 scentia, & simul incipientia vel simul evanescentia sunt proportio-
 nalia. *Q. E. D.*

Corol. Igitur si longitudo aliqua V sumatur in ea ratione ad
 arcum ET , quam habet linea DA ad lineam DE , spatium
 quod corpus ascensu vel descensu toto in Medio resistente descri-
 bit, erit ad spatium quod in Medio non resistente eodem tem-

pore describere posset, ut arcarum illarum differentia ad $\frac{BD \times V^2}{4AB}$,
 ideoque ex dato tempore datur. Nam spatium in Medio non
 resistente est in duplicata ratione temporis, sive ut V^2 , & ob da-
 tas BD & AB , ut $\frac{BD \times V^2}{4AB}$. Tempus autem est ut DET
 seu : $BD \times ET$, & harum arcarum momenta sunt ut $\frac{BD \times V}{2AB}$
 ductum in momentum ipsius V & : BD ductum in momentum
 ipsius ET , id est, ut $\frac{BD \times V}{2AB}$ in $\frac{DAq \times 2m}{DEq}$ & : $BD \times 2m$,
 sive ut $\frac{BD \times V \times DAq \times m}{AB \times DEq}$ & $BD \times m$. Et propterea mo-
 mentum arcæ V est ad momentum differentie arcarum DET
 & $AKNb$, ut $\frac{BD \times V \times DAq \times m}{AB \times DEq}$ ad $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$ sive ut
 $\frac{V \times DA}{DE}$ ad AP , adeoque, ubi V & AP quam minima sunt,
 in ratione aequalitatis. Aqualis igitur est area quam minima
 $\frac{BD \times V^2}{4AB}$ differentie quam minima arcarum DET & $AKNb$.
 Unde cum spatia in Medio utroque, in principio descensus vel
 fine ascensus simul descripta accedunt ad aequalitatem, adeoque
 tunc sunt ad invicem ut area $\frac{BD \times V^2}{4AB}$ & arcarum DET &
 $AKNb$ differentia, ob eorum analogia incrementa necesse est ut
 in aequalibus quibuscunque temporibus sint ad invicem ut area illa
 $\frac{BD \times V^2}{4AB}$ & arcarum DET & $AKNb$ differentia. Q. E. D.

S E C T. IV.

De Corporum circulari Motu in Medis resistentibus.

L E M. III.

Sit PQR & Spiralis que secet radios omnes SP, SQ, SR , &c. in equalibus angulis. Agatur recta PT qua tangat eandem in puncto quorundam P , secetque radium SQ in T , & ad Spiralem erectis perpendicularibus PO, QQ concurrentibus in O , jungatur SO . Dico quod si puncta P & Q accedant ad invicem & coeant, angulus PSO evadet rectus, & ultima ratio rectanguli $TQ \times PS$ ad PQ quad. erit ratio equalitatis.

Etenim de angulis rectus OPQ, OQR subducantur anguli aequales SPQ, SQR , & manebunt anguli aequales OPS, OQS . Ergo circulus qui transit per puncta O, S, P transibit etiam per punctum Q . Coeant puncta P & Q , & hic circulus in loco coitus PQ tanget Spiralem, adeoque perpendiculariter secabit rectam OP . Fiet igitur OP diameter circuli huius, & angulus OSP in semicirculo rectus. Q. E. D.

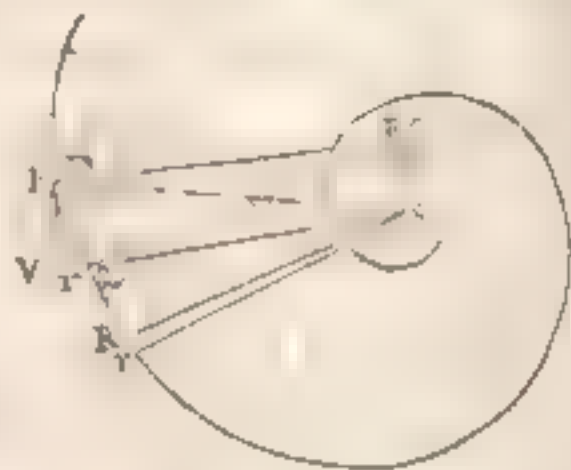


Ad OP demittantur perpendiculara QD, SE , & linearum rationes ultimae erunt huiusmodi TQ ad PD ut TS vel PS ad PE , seu PO ad PS . Item PD ad PQ ut PQ ad PO . Et ex aequo perturbate TQ ad PQ ut PQ ad PS . Unde fit PQ aequalis $PQ \times PS$. Q. E. D.

Prop. XV. Theor. XI.

Si Medium densitas in locis singulis sit reciproce ut distantia locorum a centro immobili, sitque vis centripeta in duplicata ratione densitatis. duo quod corpus gyri potest in Spirali, qua radios omnes a centro illo ductos intersecat in angulo dato.

Ponantur quæ in superiore Lemmate, & producat SQ ad V , ut sit SV æqualis SP . Temporibus æqualibus describat corpus arcus quam minimos PQ & QR , sintque arcus PSQ , QSR æquales. Et quoniam vis centripeta, qua corpus urgetur in P est reciproce ut SPq . & (per Lem. X. Lib. I.) lineola TQ , quæ vi illa generatur, est in ratione composita ex ratione hujus vis & ratione duplicata temporis quo arcus PQ describitur, (Nam resistenciam in hoc casu, ut infinite minorem quam vis centripeta negligo) erit $TQ \times SPq$. id est (per Lemma novissimum) $PQq \times SP$, in ratione duplicata temporis, adeoque tempus est ut $PQ \times \sqrt{SP}$, & corporis velocitas qua arcus PQ illo tempore describitur ut $\frac{PQ}{PQ \times \sqrt{SP}}$ seu



$\frac{1}{\sqrt{SP}}$, hoc est in dimidiata ratione ipsius SP reciproce. Et simili argumento velocitas, qua arcus QR describitur, est in dimidiata ratione ipsius SQ reciproce. Sunt autem arcus illi PQ & QR ut velocitates descriptrices ad invicem, id est in dimidiata ratione SQ ad SP , sive ut SQ ad $\sqrt{SP} \times \sqrt{SQ}$, & ob æquales angulos SPQ , SQR & æquales arcus PSQ , QSR , est arcus PQ

PQ ad arcum QR ut SQ ad SP . Sumantur proportionalium consequentium differentiae, & fiet arcus PQ ad arcum Rr ut SQ ad $SP - SP' \times SQ$, seu $1Q$, nam punctis P & Q coeuntibus, ratio ultima $SP - SP' \times SQ$ ad $1Q$ fit equalitatis. In Medio non resistente areae aequales PSQ , QSr (per Theor. I. Lib. I.) reorum differentia Rsr , & propterea resistentia est ut lineolae QR decrementum Rr collatum cum quadrato temporis quo generatur. Nam lineola Rr (per Lem. X. Lib. I.) est in duplicata ratione temporis. Est igitur resistentia ut $\frac{Rr}{PQg. \times SP}$.

Erat autem PQ ad Rr ut SQ ad VQ , & inde $\frac{Rr}{PQg. \times SP}$ fit

III $\frac{VQ}{PQ \times SP \times SQ}$ five ut $\frac{OS}{OP \times SPg.}$ Namque punctis P & Q coeuntibus, SP & SQ coeunt, & ob similia triangula PVQ , PSO , fit PQ ad VQ ut OP ad OS . Est igitur $\frac{OS}{OP \times SPg.}$ ut

resistentia, id est in ratione densitatis Medii in P & ratione duplicata velocitatis conjunctum. Auferatur duplicata ratio velocitatis, nempe ratio $\frac{1}{SP}$, & manebit Medii densitas in P ut

$\frac{OS}{OP \times SP}$. Detur Spiralis, & ob datam rationem OS ad OP , densitas Medii in P erit ut $\frac{1}{SP}$. In Medio igitur cujus densitas

est reciproce ut distantia a centro SP , corpus gyriari potest in hac Spirali. Q. E. D.

Corol. 1. Velocitas in loco quovis P ea semper est quacum corpus in Medio non resistente gyriari potest in circulo, ad eandem a centro distantiam SP .

Corol. 2. Medii densitas, si datur distantia SP , est ut $\frac{OS}{OP}$,
fin

in distantia illa non datur, ut $\frac{OS}{OP \times SP}$. Et inde Spiralis ad quamlibet Medium densitatem aptari potest.

Corol. 3. Vis resistentiæ in loco quovis P , est ad vim centripetam in eodem loco ut OS ad OP . Nam vires illæ sunt ut linea Rr & TQ seu ut $\frac{VQ \times PQ}{SQ}$ & $\frac{PQ}{SP}$ quas simul generant, hoc est ut PQ & PQ , seu OS & OP . Data igitur Spirali datur proportio resistentiæ ad vim centripetam, & viceversa ex data illa proportione datur Spiralis.

Corol. 4. Corpus itaque gyron nequit in hac spirali, nisi ubi vis resistentiæ minor est quam dimidium vis centripeta. Fiac resistentia æqualis dimidio vis centripeta & Spiralis conueniet cum linea recta PS , usque hac recta corpus descendet ad centrum, dimidia semper cum velocitate quæ probauimus in sup. moribus in casu Parabolæ (Theor. X. lib. I.) descensum in Medio non resistente fieri. Unde tempora descensus hic erunt dupla maiora temporibus illi atque ad 0 dantur.

Corol. 5. Et quæcumque in æqualibus a centro S tantæ velocitatis eadem est in Spirali PQR atque in recta SP , & longitudo Spiralis ad longitudinem rectæ PS est in data ratione, nempe in ratione OP ad OS , tempus descensus in Spirali erit ad tempus descensus in recta SP in eadem illa data ratione, proindeque datur.

Corol. 6. Si centro S intervallis duobus datis describantur duo circuli; numerus revolutionum quas corpus intra circulorum circumferentias complere potest, est ut $\frac{PS}{OS}$, sive ut Tangens anguli quem Spiralis continet cum radio PS , tempus vero revolutionum earundem ut $\frac{OP}{OS}$, id est reciproce ut Medii densitas.

Corol. 7. Si corpus, in Medio cuius densitas est reciproce ut distantia loci erit a centro, revolutionem in Curva quacunque AEB circa

circa centrum illud fecerit, & Radium primum AS in eodem angulo secuerit in B quo prius in A , idque cum velocitate quæ fuerit ad velocitatem suam primam in A reciproce in dimidiata

ratione distantiarum a centro (id est ut BS ad mediam proportionalem inter AS & CS ;) corpus illud perget innumeras confimiles revolutiones BFC , CGD , &c. facere, & intersectionibus distinguet Radium AS in partes AS , BS , CS , DS &c. continue proportionales.

Revolutionum vero tempora erunt ut Perimetri orbitarum AEB , BFC , CGD &c. directe, & velocitates in principiis A , B , C , inverse, id est ut AS^2 , BS^2 , CS^2 . Atque tempus totum, quo corpus perveniet ad centrum, erit ad tempus revolutionis primæ ut summa omnium continue proportionalium AS^2 , BS^2 , CS^2 pergentium in infinitum, ad terminum primum AS^2 , id est ut terminus ille primus AS^2 ad differentiam duorum primorum $AS^2 - BS^2$, & quam proxime ut AS ad AB . Unde tempus illud totum expedite invenitur.

Corol 8. Ex his etiam præterpropter colligere licet motus corporum in Medis, quorum densitas aut uniformis est, aut aliam quamcunque legem assignatam observat. Centro S interval-
lis continue proportionalibus SA , SB , SC &c. describe cir-
culos



culos quoscunque, & statue numerum revolutionum inter perimetros duorum quorumvis ex his circulis, in Medio de quo egimus, esse ad numerum revolutionum inter eosdem in Medio proposito, ut Medii propositi densitas mediocritas inter hos circulos ad Medii, de quo egimus, densitatem mediocrem inter eosdem quam proxime, Sed & in eadem quoque, ratione esse Tangentem anguli quo Spiralis præfinita, in Medio de quo egimus, secat radium AS , ad tangentem anguli quo Spiralis nova secat radium eundem in Medio proposito: Atque, etiam ut sunt eorundem angulorum secantes ita esse tempora revolutionum omnium inter circulos eosdem duos quam proxime. Si hæc fiant passim inter circulos binos, continuabitur motus per circulos omnes. Atque hoc pacto haud difficile imaginari possumus quibus modis ac temporibus corpora in Medio quocunque regulari gyratione debeant.

Corol. 9. Et quamvis motus excentrici in Spiralibus ad formam Ovalium accedentibus peragantur, tamen concipiendo Spiralem illarum singulas revolutiones eadem ab invicem intervallis distare, indemque gradibus ad centrum accedere cum Spirali superius descripta, intelligemus etiam quomodo motus corporum in huiusmodi Spiralibus peragantur.

Prop. XVI. Theor. XII.

Si Medii densitas in locis singulis sit reciproce ut dignitas aliquot distantie locorum a centro, sitque et vis centripeta reciproce in distantia in dignitatem illam ducta: dico quod corpus gyratione potest in Spirali, quæ radios omnes a centro illo ductos intersecat in angulo dato.

Demonstratur eadem methodo cum Propositione superiore. Nam si vis centripeta in P sit reciproce ut distantie SP dignitas quælibet SP^{n+1} cuius index est $n+1$, colligetur ut supra, quod tempus quo corpus describit arcum quemvis PQ erit ut $PQ \times SP^n$
&

& resistentia in P ut $\frac{R r}{P Q q. \times S P^n}$ sive ut $\frac{4^n V Q}{P Q \times S P^n \times S Q}$, ade-
 que ut $\frac{4^n OS}{OP \times S P^{n+1}}$. Et propterea densitas in P est reciproce ut
 $S P^n$.

Scholium.

Ceterum hac Propositione & superiores, quæ ad Media inæquali-
 ter densa spectant, intelligendæ sunt de motu corporum adeo
 parvorum, ut Medii ex uno corporis latere major densitas quam
 ex altero non consideranda veniat. Resistentiam quoque cæteris
 paribus densitati proportionalem esse suppono. Unde in Medii
 quorum vis resistendi non est ut densitas, debet densitas eo usque
 augeri vel diminui, ut resistentiæ vel tollatur excessus vel defectus
 suppleatur.

Prop. XVII. Prob. V.

*Invenire & vim centripetam & Medii resistentiam qua corpus in
 data Spirali data lege revolvitur potest. Vide Fig. Prop. XV.*

Sit spiralis illa PQR. Ex velocitate qua corpus percurrit ar-
 cum quam minimum PQ dabitur tempus, & ex altitudine TQ,
 quæ est ut vis centripeta & quadratum temporis, dabitur vis. De-
 inde ex arcuum, æqualibus temporum particulis confectarum PSQ
 & QSR, differentia RSR, dabitur corporis retardatio, & ex re-
 tardatione invenietur resistentia ac densitas Medii.

Prop. XVIII. Prob. VI.

*Data lege vis centripetæ, invenire Medii densitatem in locis singulis,
 qua corpus datam Spiralem describet.*

Ex vi centripetæ invenienda est velocitas in locis singulis, de-
 inde ex velocitatis retardatione querenda Medii densitas ut in
 Propositione superiore.

Methodum vero tractandi hac Problemata aperui in huius Propositione decima, & Lemmate secundo, & Lectorem in huiusmodi perplexis disquisitionibus diutius detinere nolo. Adhendenda iam sunt aliqua de viribus corporum ad progrediendum, deque densitate & resistentia Mediorum, in quibus motus hactenus expositi & his affines peraguntur.

S E C T. V.

De Densitate & compressione Fluidorum, deque Hydrostatica.

Definitio Fluidi.

Fluidum est corpus omne cuius partes cedunt vi cuiusque illatae, & cedendo facile movetur inter se.

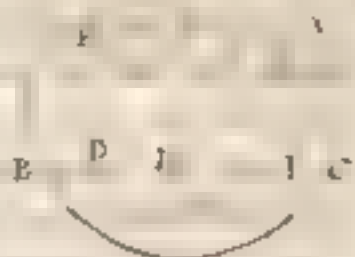
Prop. XIX. Theor. XIII.

Fluidi homogenei & immixti, quod in vase quocunque immixto claudatur & undique comprimitur, partes omnes (seposita Condensationis, gravitatis & virium omnium centripetarum consideratione) æqualiter premuntur undique, & abique omni motu a pressione illa orto permanent in locis suis.

Caj. 1. In vase quicunque *A B C* claudatur & uniformiter comprimitur fluidum undique — dico quod eisdem pars nulla ex illa pressione movebitur. Nam si pars aliqua *D* moveatur, necesse est ut eam & cum ea partes, ad eandem a centro distantiam undique eo iusseret si maiora immoverentur atque hoc adeo quia similis & æqualis est omnium pressio, & motus omnis exclusus proponitur, nisi qui a pressione illa oritur. Atqui non possunt omnes ad centrum propius accedere nisi fluidum ad centrum condensetur, contra Hypothesin. Non possunt longius ab eo recedere nisi

ni fluidam ad circumferentiam condenetur. etiam contra Hypothesin Non possunt servata sua a centro distantia moveri in plagam quamcunque, quia pari ratione movebuntur in plagam contrariam, in plagas autem contrarias non potest pars eadem eodem tempore moveri. Ergo fluidi pars nulla de loco suo movebitur. Q. E. D.

Cas. 2. Dico jam quod fluidi tuius partes omnes sphaericae aequaliter premuntur undique: sit enim EF pars sphaerica fluidi, & si haec undique non prematur aequaliter, augeatur pressio minor, usque, dum ipsa undique prematur aequaliter, & partes eius, per eandem primum, permanebunt in locis suis. Sed ante auctam pressionem permanebunt in locis suis, per eandem eundem primum, & additione pressionis novae movebuntur de locis suis, per definitionem Fluidi. Quae duo repugnant. Ergo falso dicebatur quod Sphaera $E F$ non undique premebatur aequaliter. Q. E. D.



Cas. 3. Dico praeterea quod diversarum partium sphaericarum aequalis sit pressio. Nam partes sphaericae contiguae si mutuo premuntur aequaliter in puncto contactus, per motus Legem III. Sed & per Caum secundum, undique premuntur eadem vi. Partes igitur dux quavis sphaericae non contiguae, quia pars sphaerica intermedia tangere potest utramque, premuntur eadem vi. Q. E. D.

Cas. 4. Dico jam quod fluidi partes omnes ubique premuntur aequaliter. Nam partes dux quavis tangi possunt a partibus Sphaericis in punctis quibuscunque, & ibi partes illas sphaericas aequaliter premunt, per Caum 3. & vicissim ab illis aequaliter premuntur, per Motus Legem Tertiam. Q. E. D.

Cas. 5. Cum igitur fluidi pars qualibet GHI in fluido reliquo tanquam in vase claudatur, & undique prematur aequaliter, partes autem eius se mutuo aequaliter premant & quiescant inter se, manifestum est quod Fluidi cujuscunque GHI , quod ledi-

que premitur æqualiter, partes omnes se mutuo premunt æqualiter, & quiescunt inter se. *Q. E. D.*

Cas 6. Igitur si Fluidum illud in vase non rigido claudatur, & undique non prematur æqualiter, cedit idem pressioni fortiori, per Definitionem Fluiditatis.

Cas 7. Ideoque in vase rigido Fluidum non sustinebit pressionem fortioiorem ex uno latere quam ex alio, sed eadem cedit, idq. in momento temporis, quia latus vasis rigidum non persequitur liquorem cedentem. Cedendo autem urgebit latus oppositum, & sic pressio undique ad æqualitatem verget. Et quoniam Fluidum, quam primum a parte magis pressa recedere conatur, inhibetur per resistentiam vasis ad latus oppositum, reducetur pressio undique ad æqualitatem in momento temporis absque motu locali, & tandem, partes fluidi per Causam quintam, se mutuo premunt æqualiter, & quiescunt inter se. *Q. E. D.*

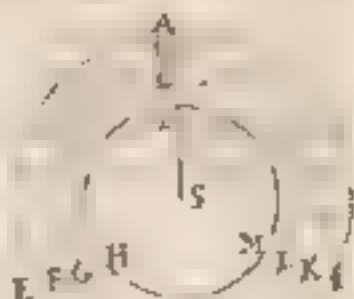
Corol. Unde nec motus partium fluidi inter se, per pressionem fluido ubivis in externa superficie illatam, mutari possunt nisi, quatenus aut figura superficiæ altera mutatur, aut omnes fluidi partes intensius vel remissius sese premendo districteius vel facilius labantur inter se.

Prop. XX. Theor. XIV.

Si Fluidi Sphærici, & in æqualibus a centro distantis homogenei, fundo sphærico concentrico incumbunt partes singule versus centrum totius gravitent, & sustinent suum pondus Cylindri, cujus basis æqualis sit superficiæ fundi, & altitudo eadem quæ Fluidi incumbentis.

Sit *D H M* superficies fundi, & *A E I* superficies superior fluidi. Superficiebus sphæricis *B F H*, *C G L* distinguatur fluidum in Orbis concentricos æqualiter crassos, & concipe vim gravitatis agere solummodo in superficiem superiorem Orbis cuiusque, & æquales esse actiones in æquales partes superficiæ omnium. Premitur ergo superficies suprema *A E* vi simplici gravitatis propria, qua & omnes Orbis supremæ partes & superficies
secunda

secunda $B F K$ (per Prop. XIX.) premuntur. Premuntur præterea superficies secunda $B F K$ vi propriæ gravitatis, quæ addita vi priori facit pressionem duplam. Hac pressione & insi per vi propriæ gravitatis, id est pressione tripla, urgetur superficies tertia $C G L$. Et similiter pressione quadrupla urgetur superficies quarta, quintupla quinta & sic deinceps. Pressio igitur quæ superficies unaquæque urgetur, non est ut quantitas solida fluidi incumbens, sed ut numerus Orbium ad



utque summam fluidi, & æquatur gravitati Orbis infimi multiplicata per numerum Orbium: hoc est gravitati solidi cuius ultima ratio ad Cylindrum præstatum, (si modo Orbium augeatur numerus & minuatur crassitudo in infinitum, sic ut actio gravitatis a superficie infima ad supremam continua reddatur) fiet ratio æqualitatis. Sustinet ergo superficies infima pondus cylindri præstanti. *Q. E. D.* Et simili argumentatione patet Propositio, ubi gravitas decrevit in ratione quavis assignata distantie a centro, ut & ubi Fluidum factum rarius est, deorsum densius. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur fundum non urgetur a toto fluidi incumbens pondere, sed eam solummodo ponderis partem sustinet quæ in Propositione describitur pondere reliquo a fluidi figura formata sustentato.

Corol. 2. In æqualibus autem a centro distantibus eadem semper est pressionis quantitas, siue superficies pressa sit Horizonti parallela vel perpendicularis vel obliqua, siue fluidum a superficie pressa sursum continuatum surgat perpendiculariter secundum lineam rectam, vel serpit oblique per tortas cavitates & canales, easque regulares vel maxime irregulares, amplas vel angustissimas. Hisce circumstantiis pressionem in totam colligitur, applicando demonstrationem Theorematis huius ad Casus singulos Fluidorum.

Corol. 3.

Corol. 3 Eadem Demonstratione colligitur etiam (per Prop. XIX) quod fluidi gravis partes nullam, ex pressione ponderis incumbentis, acquirunt motum inter se, si modo excludatur motus qui ex condensatione oritur.

Corol. 4 Et propterea si aliud eadem gravitati specificæ corpus, quod sit condensationis expertum submergetur in hoc fluido, id ex pressione ponderis incumbentis nullum acquirere motum non descendet, non ascendet, non cogetur figuram suam mutare. Si Sphaericum est manebit sphaericum non obstante pressione, si quadratum est manebit quadratum, idque, si venelle sit, si venellissimum siue fluido libere immoretur, siue fundo incingat. Habet enim fluidi pars quilibet internam rationem corporis & buccitæ, & par est ratio unum cum aliis in magnitudine, si uerò & gravitatis specificæ submersorum corporum. Si corpus & buccitatem servato pondere liquetere & indueret formam fluidi, hoc, si prius ascenderet vel descenderet vel ex pressione figuram novam indueret, etiam nunc ascenderet vel descenderet vel figuram novam induere cogeretur: id adeo quia gravitas eius cæteraque motuum causæ permanent. Atqui, per Cas. 5 Prop. XIX. iam quiesceret & figuram retineret. Ergo & prius.

Corol. 5 Proinde corpus quod specificè gravior est quam Fluidum sibi contrarium subdebit, & quod specificè levius est ascendet, motumque & figuræ mutationem consequetur, quantum excedit ille vel defectus gravitatis educere poterit. Namque excedens ille vel defectus rationem habet impetus, quo corpus, aliam æquilibrio cum fluidi partibus esset, tam, urgetur, & comparari potest cum excedit vel defectu ponderis in lance alterutra libæ.

Corol. 6 Corporum, uter in fluidis constitutorum duplex est Gravitas altera vera & absoluta, altera apparens, vulgaris & comparativa. Gravitas absoluta est ut tota quæ corpus deorsum tendit relativa & vulgaris est excessus gravitatis quo corpus magis tendit deorsum quam fluidum ambiens. Prioris generis Gravitate partes fluidorum & corporum omnium gravitant in locis suis.

suis: ideoque conjunctis ponderibus componunt pondus totius.
 Nam totum omne grave est, ut in vasis liquorum plenis experiri
 cet, & pondus totius æquale est ponderibus omnium partium, ideo-
 que ex illis componitur. Alterius generis gravitate corpora
 non gravitant in locis suis, id est inter se collata non prægravant,
 sed maturos ad descendendum conatus impediencia permanent in
 locis suis, perinde ac si gravia non essent. Quæ in Aere sunt & non
 prægravant, Vulgus gravia non judicat. Quæ prægravant vul-
 gus gravia judicat prætenus ab Aeris pondere non iustinetur.
 Pondera vero nihil aliud sunt quam excessus verorum ponde-
 rum supra pondus Aeris. Unde & valde dicuntur levia, quæ
 sunt minus gravia, Aerique prægravanti cedendo superiora pe-
 tunt. Comparative levia sunt non vere, quia descendunt in
 vacuo. Sic & in Aqua, corpora, quæ ob maiorem vel minorem
 gravitatem descendunt vel ascendunt, sunt comparative & appa-
 renter gravia vel levia, & eorum gravitas vel levitas comparativa
 & apparens est excessus vel defectus quo vera eorum gravitas vel
 superat gravitatem aquæ vel ab ea superatur. Quæ vero nec præ-
 gravando descendunt nec prægravanti cedendo ascendunt, etiam
 si veri minus ponderibus adaugent pondus totius, comparative ta-
 men & si tenui vel si non gravitant in aqua. Nam similis est lo-
 rum Casuum Demonstratio.

Corol. 7. Quæ de gravitate demonstrantur, obtinent in aliis
 quibuscunque viribus centripetis.

Corol. 8. Proinde si Medium, in quo corpus aliquod move-
 tur, urgeatur vel a gravitate propria, vel ab alia quacunque, vi cen-
 tripeta, & corpus ab eadem vi urgeatur totius differentia verum
 est vs illa motrix, quam in præcedentibus Propositionibus ut
 vim centripetam consideravimus. Si corpus a villa urgeatur le-
 vis, differentia viam pro vi centripeta haberi debet.

Corol. 9. Cum autem fluida premendo corpora inclusa non
 mutant eorum figuras externas, patet insuper, per Corollaria
 Prop. XIX. quod non mutant situm partium internarum inter
 se. proindeque, si Animala immergantur, & sentatio omnis a mo-
 tu

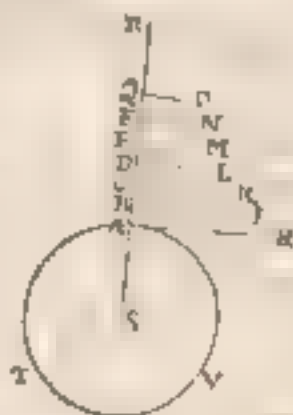
tu partium oriatur: nec lædent corporibus immersis, nec sensationem ullam excitabunt, nisi quatenus hæc corpora a compressione condentari possunt. Et par est ratio cujuscunque corporum Systematis fluido comprimente circumdati. Systematæ partes omnes eisdem agitantur motibus, ac si in vacuo constituerentur, ac solam retinerent gravitatem suam comparativam, nisi quatenus fluidum vel motibus eorum nonnihil resistat, vel ad easdem compressione conglutinandas requiratur.

Prop. XXI. Theor. XV.

Sit Fluidi cujusdam densitas compressioni proportionalis, & partes ejus a vi centripeta distantis suis a centro reciproce proportionali deorsumtrahantur. dico quod si distantie illæ sumantur continue proportionales, densitates fluidi in ejusdem distantis erunt etiam continue proportionales.

Designet ATV fundum Sphaeræ cui fluidum incumbit, S centrum, SA, SB, SC, SD, SE , &c. distantias continue proportionales. Erigantur perpendicularia AH, BI, CK, DL, EM , &c. quæ sint ut densitates Medii in locis A, B, C, D, E , & specificæ gravitates in ejusdem locis erunt ut $\frac{AH}{AS}, \frac{BI}{BS}, \frac{CK}{CS}$, &c. vel, quod

perinde est, ut $\frac{AH}{AB}, \frac{BI}{BC}, \frac{CK}{CD}$, &c. Finge primum has gravitates uniformiter continuari ab A ad B , a B ad C , a C ad D &c. factis per gradus decrementis in punctis B, C, D &c. Et hæ gravitates ductæ in altitudines AB, BC, CD &c. contineant pressiones AH, BI, CK , quibus fundum ATV (juxta Theorema XIV.) urgetur. Desinet ergo particula A pressiones omnes AH, BI, CK, DL , pergendo in infinitum, & particula B pressiones omnes præter primam AH , & particula C omnes præter duas primas AH, BI , & sic deinceps. adeoque



adeoque particulae primae A densitas AH est ad particulae secundae B densitatem BI ut summa omnium $AH + BI + CH + DI$, ita infinitum, ad summam omnium $BI + CH + DI + EI$, &c. Et BI densitas secunda B est ad CH densitatem tertiam C ut summa omnium $BI + CH + DI$, &c. ad summam omnium $CH + DI$, &c. Sunt igitur summae illae differentiarum AH, BI, CH, DI, EI , &c. proportionales, atque adeo continue proportionales per se invicem. Unde proutque differentiae AH, BI, CH &c. sunt continue proportionales, sunt etiam continue proportionales. Quare capi densitates in locis A, B, C , sicut ut AH, BI, CH , &c. erunt etiam haec continue proportionales. Pergatur per latum, &c. ex quo SA, SD, SQ densitates AH, BI, CH continue proportionalibus, erunt decedentes AH, BI, CH continue proportionales. Et eodem argumento in distantis quibuscumque continue proportionalibus SA, SD, SQ densitates AH, BI, CH erunt continue proportionales. Cocant jam puncta A, B, C, D, E , &c. eo ut pro rectis gravitatum specificatam a fundo A ad si immittatur fluidi continua reddatur, & in distantis quibuscumque continue proportionalibus SA, SD, SQ densitates AH, BI, CH , semper existentes continue proportionales, manebunt etiam continue proportionales. $Q.E.D.$

Corol. Haec si datur densitas fluidi in duobus locis, puta A & E , colligi potest ejus densitas in alio quovis loco Q . Centro S , Asymptotis rectangulis SQ , SX describatur Hyperbola secans perpendicularia AH, LV, QI in a, e, q , ut & perpendicularia HX, MI, IZ ad asymptotum SX demissa in $b, m, &c.$ Fiat area $ZTmtZ$ ad aream datam $TmbX$ ut area data $L eqQ$ ad aream datam $E eaA$; & linea Zt producta abscondet lineam QT densitati proportionalem. Namque si lineae SA, SL, SQ sunt continue proportionales, erunt



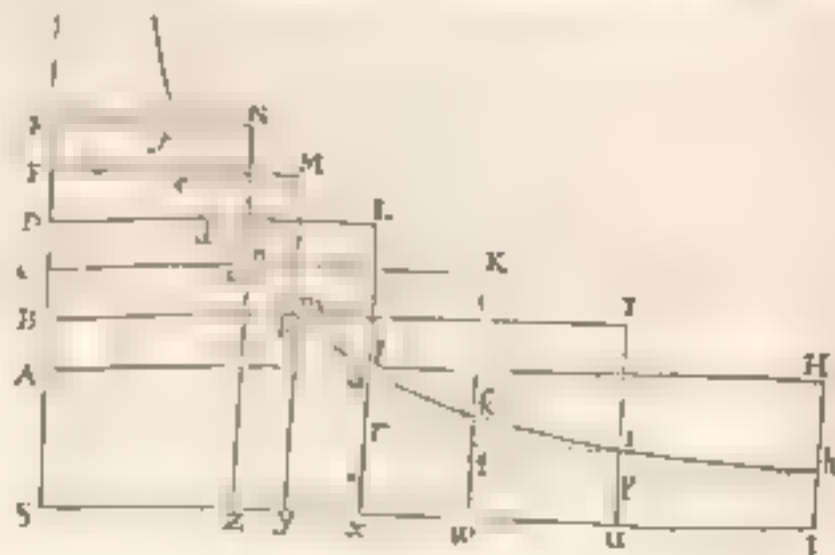
areae $EeqQ$, $EcaA$ æquales, & inde areae his proportionales
 $Ln + Z$, $XbmT$ etiam æquales & lineæ SX , SY , SZ id est AH ,
 EM , QI continue proportionales, ut oportet. Et si lineæ SA ,
 SE , SQ obtinent alium quicumque ordinem in serie continue pro-
 portionalium, lineæ AH , EM , QI , ob proportionales areas Hy-
 perbolicas, obtinebunt eundem ordinem in alia serie quantitatum
 continue proportionalium.

Prop. XXII. Theor. XVI.

Sit Fluidi cuiusdam densitas compressioni proportionalis, & partes
 ejus a gravitate quadratis distantiarum suarum a centro reciproce
 proportionali deorsum trahantur dico quod si distantie sumantur in
 progressionē Musica, densitates Fluidi in his distantis erunt in pro-
 gressionē Geometrica.

Designet S centrum, & SA , SB , SC , SD , SE distantias in
 Progressione Geometrica. Erigantur perpendiculara AH , BI , CK , &c.

quæ sint ut
 Fluidi den-
 sitates in lo-
 cis A , B , C ,
 D , E , &c. &
 ipsius gravi-
 tates spectæ
 ex in eisdem
 locis erunt
 AH BI
 Sa^2 Sb^2
 CK , &c. Fin.
 Sx^2



ge has gravitates uniformiter continuari, primam ab A ad B , se-
 cundam a B ad C , tertiam a C ad D , &c. Et hæ ductæ in altitu-
 dines AB , BC , CD , DE , &c. vel, quod perinde est, in distantias
 SA , SB , SC , &c. altitudinibus illis proportionales,ificent ex-
 ponentes

ponentes pressionum $\frac{AH}{SA}, \frac{BI}{SB}, \frac{CK}{SC}$, &c. Quare cum densitates
sint ut harum pressionum summae, differentiae densitatum $AH -$
 $BI, BI - CK$, &c. erunt ut summatarum differentiae $\frac{AH}{SA}, \frac{BI}{SB}$
 $\frac{CK}{SC}$, &c. Centro S Asymptotis SA, SX describatur Hyperbo-
la quavis, quae secet perpendiculari AH, BI, CK , &c. in a, b, c , ut &
perpendicularia ad Asymptotum SX d. omnia Hi, Iu, Kw in b, i, k ,
&c. densitatum differentiae $iH, uH, &c.$ erunt ut $\frac{AH}{SA}, \frac{BI}{SB}$, &c.

Et rectangula $iH \times i b, uH \times u i$, &c. seu ip, uq , &c. ut $\frac{AH \times i b}{SA}$,
 $\frac{BI \times u i}{SB}$, &c. id est ut Aa, Bb , &c. Est enim ex natura Hyperbolae
 SA ad All vel Si , ut ib ad Aa , adeoque $\frac{AH \times i b}{SA}$ aequale Aa .

Et simili argumento est $\frac{BI \times u i}{SB}$ aequalis Bb , &c. Sunt autem Aa
 Bb, Cc , &c. continue proportionales, & propterea differentis su-
is $Aa - Bb, Bb - Cc$, &c. proportionales, ideoque differentis
hujus proportionalia sunt rectangula ip, uq , &c. ut & summae differ-
entiarum $Aa - Cc$ vel $Aa - Dd$ summae rectangulorum $ip + uq$,
vel $ip + uq + wr$. Sinto ejusmodi terminum quam plurimum, & sum-
ma omnium differentiarum, puta $Aa - ff$, erit summa omnium
rectangulorum, puta $ztbn$, proportionalis. Augeatur numerus
terminorum & minuantur distantiae punctorum A, B, C , &c. in in-
finitum, & rectangula illa evadent aequalia areae Hyperbolicae $ztbn$,
adeoque huic areae proportionalis est differentia $Aa - ff$. Su-
mantur jam distantiae qualibet, puta SA, SD, SE in Progressio-
ne Geometrica, & differentiae $Aa - Dd, Dd - ff$ erunt aequales, &
propterea differentis hujus proportionalis areae $ztbn$, $ztbn$ aequa-
les erunt inter se. & densitates Si, Sx, Sz , id est AH, DL, FE ,
continue proportionales. Q. E. D.

Corol. Hinc si dentur Fluidi densitates duae quaevis, puta AH & CK , dabitur area thk in latum differentiae t in respondens, & inde invenietur densitas FN in altitudine quacunque ST , inveniendo aream t/hn ad aream illam datam thk ut est differentia $Aa - Ff$ ad differentiam $Aa - Cc$.

Scholium

Simili argumentatione probari potest, quod si gravitas particularum Fluidi diminuat in triplicata ratione distantiarum a centro, & quadrato, ut distantiarum $SA, SB, SC, &c.$ reciproca (nempe $\frac{SA^3}{SA^2}, \frac{SB^3}{SB^2}, \frac{SC^3}{SC^2}, &c.$) sumantur in progressionem Arithmetica, densitates $AH, BI, CK, &c.$ erunt in progressionem Geometricam. Et si gravitas diminuat in quadruplicata ratione distantiarum, & cuborum distantiarum reciproca (puta $\frac{SA^4}{SA^3}, \frac{SB^4}{SB^3}, \frac{SC^4}{SC^3}, &c.$) sumantur in progressionem Arithmetica, densitates $AH, BI, CK, &c.$ erunt in progressionem Geometricam. Et sic in infinitum. Hinc si gravitas particularum Fluidi in omnibus distantis eadem sit, & distantiae sint in progressionem Arithmetica, densitates erunt in progressionem Geometricam, uti Vir. Cl. Edmundus Halley invenit. Si gravitas sit ut distantia, & quadrata distantiarum, erunt in progressionem Arithmetica, densitates erunt in progressionem Geometricam. Et sic in infinitum. Haec ita se habent ut Fluidi compressione condensati densitas est ut vis compressiva, vel, quod idem est, spatium a Fluido occupatum reciproce ut $1/x$ vel $1/x^2$. Erit igitur aliae condensationis leges, ut quod cubus vis compressivae sit ut quadrato-quadratum densitatis, seu ut putata sit 0.5 aequalis quadruplicatae rationi densitatis. Quod si eadem gravitas sit reciproce ut quadratum distantiae a centro, densitates erunt reciproce ut cubus distantiae. Invenitur quod cubus vis compressivae sit ut quadrato-cubus densitatis, & si gravitas sit reciproce ut quadratum distantiae, densitates erunt reciproce in

seſquiphcata ratione diſtantie. Fugatur quod vis comprimens ſit in duplicata ratione diſtantis, & gravitas reciproce in ratione duplicata diſtantie, & denſitas erit reciproce ut diſtantia. Caſus omnes percurrere longum eſſet.

Prop. XXIII. Theor. XVII.

Particule viribus qua ſunt reciproce proportionales diſtantiis centrorum ſuorum ſe mutuo fugientes componunt Fluidum Elasti- cum, cujus denſitas eſt compreſſioni proportionalis. Et tunc verba, p Fluidi ex particulis ſe mutuo ſeſquiphcatu compoſita denſitas ſit ut compreſſio, vires centrifuge particularum ſunt reciproce proportionales diſtantiis centrorum.

Includi intelligatur Fluidum in ſpatio cubico ACE , & in compreſſione rectum in ſpatium cubicum minus ace , & particularum ſimilem ſitum later ſe in utro-

que ſpatio obtinentur diſtantiæ eant ut cuborum latera AB, ab , & Medii denſitates reciproce ut ſpatia continentia $ABenb$, & $ab enb$. In latere cubi maioris $ABCD$ capiatur quadratum DP æquale lateri



cubi minori ab , & ex Hypotheſi, preſſio qua quadratum DP urget Fluidum includum, erit ad preſſionem qua later illud quadratum ab urget Fluidum includum, ut Medii denſitates ad invicem, hoc eſt $ab enb$ ad $ABenb$. Sed preſſio qua quadratum DP urget Fluidum includum eſt ad preſſionem qua quadratum DP urget idem Fluidum, ut quadratum DB ad quadratum DP , hoc eſt ut $AB per d$ ad $ab per d$. Ergo ex æquo preſſio qua later DB urget Fluidum, eſt ad preſſionem qua later ab urget Fluidum, ut ab ad AB . Planis FGH , fgb per media cuborum ductis, diſtinguatur Fluidum in duas partes, & hæc ſe mutuo prement indẽm viribus

viribus, quibus premuntur a planis AC , ac , hoc est in proportionem ab ad AB adeoque vires centrifugæ, quibus hæ præssiones sustinentur, sunt in eadem ratione. Ob eundem particularum numerum similemque situm in utroque cubo, vires quas particule omnes secundum plana FGH , fgb exercent in omnes, sunt ut vires quas singule exercent in singulas. Ergo vires, quas singule exercent in singulas secundum planum FGH in cubo maiore, sunt ad vires quas singule exercent in singulas secundum planum fgb in cubo minore ut ab ad AB , hoc est reciproce ut distantie particularum ad invicem. *Q. E. D.*

Et vice versa, si vires particularum singularum sunt reciproce ut distantie, id est reciproce ut cuborum latera AB , ab , summæ virium erunt in eadem ratione, & præssiones laterum DB , db ut summæ virium, & præssio quadrati DP ad præssionem lateris DB ut ab quadr. ad AB quadr. Et ex aquo præssio quadrati DP ad præssionem lateris db ut ab cub. ad AB cub. id est vis compressionis ad vim compressionis ut densitas ad densitatem. *Q. E. D.*

Scholium.

Simili argumento si particularum vires centrifugæ sint reciproce in duplicata ratione distantiarum inter centra, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-quadrata densitatum. Si vires centrifugæ sint reciproce in triplicata vel quadruplicata ratione distantiarum, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-cubi vel cubo-cubi densitatum. Et universaliter, si D ponatur pro distantia, & L pro densitate fluidi compressi, & vires centrifugæ sint reciproce ut distantia dignitas qualibet D^n , cuius index est numerus n , vires comprimentes erunt ut latera cubica Dignitatis L^{n+2} , ceteris uel L est numerus $n+2$; & contra. Intellegendi vero sunt hæc verba, si particularum viribus centrifugis quæ continentur in partibus proximis, aut non longe ultra distantur. Exemplum habemus in corporibus Magneticis. Horum

rum Virtus attractiva terminatur tunc in sui generis corporibus sibi proximi. Magnitudo virtus per antipositam laminam ferri contrahitur, & a lamina tere terminatur. Nam corpora ulteriora non tanta Magnitudo quam a lamina trahuntur. Ad eundem modum si particula tugantias sui generis particulas sibi proximas, in particula autem remotiores virtutem nullam nisi forte per particulas intermediarias virtute illa auctas exerceant, ex huiusmodi particulis componentur Fluida de quibus actum est in hac propositione. Quod si particula cuiusque virtus in infinitum propagetur, opus erit ut majori ad equalem condensationem maioris quantitatis Fluidi. Ut si particula unaquaque, vi sua, quæ sit reciproce ut distantia locorum a centro suo, tugat alias omnes particulas in infinitum, Virres quibus Fluidum in vasis similibus aqualiter comprimi & condensari possit, erunt ut quadrata diametrorum vasorum ideoque vis, qua Fluidum in eodem vase comprimitur, erit reciproce ut latus cubicum quadrato-cubi densitatis. An vero Fluida Elastica ex particulis se mutuo tugantibus consistant, Quæstio Physica est. Nos proprietatem Fluidorum ex eiusmodi particulis constantium Mathematicè demonstravimus, ut Philotoplus aniam præbeamus Quæstionem illam tractandi.

S E C T. VI.

De Motu & resistantia Corporum Funependulorum.

Prop. XXIV. Theor. XVIII.

Quantitates materiae in corporibus funependulis, quorum centra oscillationum a centro suspensionis aqualiter distant, sunt in ratione composita ex ratione ponderum & ratione duplicata temporum oscillationum in vacuo.

Nam velocitas, quam data vis in data materia dato tempore generare potest, est ut vis & tempus directe, & materia inverse.

Quo

Quo maior est vis vel maior tempus vel minor materia, eo maior generabitur velocitas. Id quod per motus Legem secundam manifestum est. Jam vero si pendula eiusdem sint longitudinis, vires motrices in locis a perpendiculari aequaliter distantibus sunt ut pondera: ideoque si corpora duo oscillando describant arcus aequales, & arcus illi dividantur in partes aequales, cum tempora quous corpora deserant singulas arcuum partes correspondentes sint ut tempora oscillationum totarum, erunt velocitates ad invicem in correspondentibus oscillationum partibus ut vires motrices & tota oscillationum tempora directe & quantitates materiae reciproce: adeoque quantitates materiae ut vires & oscillationum tempora directe & velocitates reciproce. Sed velocitates reciproce sunt ut tempora, atque adeo tempora directe & velocitates reciproce sunt ut quadrata temporum, & propterea quantitates materiae sunt ut vires motrices & quadrata temporum, id est ut pondera & quadrata temporum. Q. E. D.

Corol. 1. Ideoque si tempora sunt aequalia, quantitates materiae in singulis corporibus erunt ut pondera.

Corol. 2. Si pondera sunt aequalia, quantitates materiae erunt ut quadrata temporum.

Corol. 3. Si quantitates materiae aquantur, pondera erunt reciproce ut quadrata temporum.

Corol. 4. Unde cum quadrata temporum ceteris paribus sint ut longitudo pendulorum, si & tempora & quantitates materiae aequata sunt, pondera erunt ut longitudo pendulorum.

Corol. 5. Et universaliter, quantitas materiae pendula est ut pondus & quadratum temporis directe, & longitudo penduli inverse.

Corol. 6. Sed & in Medio non resistente quantitas Materie pendulae est ut pondus comparativum & quadratum temporis directe & longitudo penduli inverse. Nam pondus comparativum est vis motrix corporis in Medio quovis gravi, ut supra explicat, adeoque idem perit in tali Medio non resistente atque pondus absolutum in vacuo.

Corol. 7.

Corol. 7. Et hunc liquet ratio tum comparandi corpora inter se, quoad quantitatem materiae in singulis, tum comparandi pondera ejusdem corporis in diversis locis, ad cognoscendam variationem gravitatis. Factis autem experimentis quam accuratissimis inveni semper quantitatem materiae in corporibus singulis eorum ponderi proportionalem esse.

Prop. XXV. Theor. XIX.

Corpora Funependula quae in Medio quovis resistuntur in ratione momentorum temporis, quaeque in ejusdem gravitatis specifica Medio non resistente moventur, oscillationes in Cycloide eodem tempore peragunt, & arcuum partes proportionales simul describunt

Sit AB Cycloidis arcus, quem corpus D tempore quovis in Medio non resistente oscillando describit. Bisecetur idem in C , ita ut C sit infimum ejus punctum, & erit vis acceleratrix qua corpus urgetur in loco quovis D vel d vel E ut longitudo arcus CD vel Cd vel CE . Exponatur vis illa per eundem arcum, & cum resistantia sit ut momentum temporis, adeoque detur, exponatur eadem per datam arcus Cycloidis partem CO , & sumatur arcus Od in ra-



tione ad arcum CD quam habet arcus OB ad arcum CB : & vis qua corpus in d urgetur in Medio resistente, cum sit excessus vis Cd supra resistantiam CO , exponetur per arcum Od , adeoque erit ad vim qua corpus D urgetur in Medio non resistente, in loco D , ut arcus Od ad arcum CD , & propterea etiam in loco B ut arcus OB ad arcum CB . Proinde si corpora duo, D , d exeant de loco

Q. II

B, &

B, & his viribus urgeantur: cum vires sub initio sint ut arcus CB & OL , erunt velocitates primæ & arcus primo descripti in eadem ratione. Sinto arcus illi BD & bd , & arcus reliqui CD , & cd erant in eadem ratione. Proinde vires ipsi CD , & cd proportionales manebunt in eadem ratione ac fuerant, & propterea corpora pergent arcus in eadem ratione simul describere. Igitur vires & velocitates & arcus reliqui CD , & cd semper erunt ut arcus totæ CD , & cd , & propterea arcus illi reliqui simul describentur. Quare corpora duo D , & d simul perventura ad loca C & O , alterum quidem in Medio non resistente ad locum C , & alterum in Medio resistente ad locum O . Cum autem velocitates in C & O sint ut arcus CB & OB , erunt arcus quos corpora ulterius pergerendo simul describunt, in eadem ratione. Sinto illi CE & Oe . Vis qua corpus D in Medio non resistente retardatur in E est ut CE , & vis qua corpus d in Medio resistente retardatur in e est ut summa vis Ce & resistentiæ CO , id est ut Oe , ideoque vires, quibus corpora retardantur, sunt ut arcibus CE , Oe proportionales arcus CB , OB , proinde que velocitates in data illa ratione retardare nituntur in eadem in illa data ratione. Velocitates igitur & arcum simul descripti semper sunt ad invicem in data illa ratione arcuum CE & Oe , & propterea si sumantur arcus totæ AB , & B in eadem ratione, corpora D , & d simul describent hos arcus, & in locis A & a motum ordinatum simul amittent. Isthæque sunt retardationes totæ, & arcibus totis BA , & BL proportionales tantæ enim partes qualibet BD , & bd vel BL , & be quæ simul describuntur. $Q.E.D.$

Corporum motus velocissimus in Medio resistente non incidit in punctum initium in C , sed reperitur in puncto illo O , quo arcus totus descriptus a & b vincatur. Et corpus subinde pergerendo ad a , in motu retardatur quibus antea accelerabatur in sensu suo a B ad O .

Prop. XXVI. Theor. XX.

Corporum Fimpendulorum, quæ resistuntur in ratione velocitatum, oscillationes in Cycloide sunt Isochrone.

Nam si corpora duo a centro suspensiorum equaliter distantia, oscillando describant arcus inæquales, & velocitates in arcuum partibus correspondentibus sint ad invicem ut arcus toti: resistentiæ velocitatibus proportionales erunt etiam ad invicem ut idem arcus. Proinde si viribus motricibus a gravitate commotis, quæ sint ut idem arcus, conferantur velocitates & resistentiæ, erunt differentie vel summe ad invicem in eadem arcuum ratione: cuiusque velocitatum incrementa vel decrementa sint ut hæ differentie vel summe, velocitates semper erunt ut arcus: atque idcirco velocitates, si sint in aliquo casu ut arcus toti, manebunt semper in eadem ratione. Sed in principio motus, ubi corpora incipiunt descendere & arcus illos describere, vires cum sint arcubus proportionales, generabunt velocitates arcubus proportionales. Ergo velocitates semper erunt ut arcus toti describendi, & propterea arcus illi simul describentur. Q. E. D.

Prop. XXVII. Theor. XXI.

Si corpora Fimpendula resistuntur in duplicata ratione velocitatum, differentie inter tempora oscillationum in Medio resistente ac tempora oscillationum in eodem graduatis specificis Medio non resistente, erunt arcubus oscillantibus descriptis proportionales, quam proxime.

Nam pendula tam libera in Medio resistente describantur arcus inæquales A, B . & resistentiæ corporis in arcu A , erit ad resistentiæ corporis in parte correspondente arcus B , in duplicata ratione velocitatum: id est ut A quad. ad B quad. quædam proxime. Si resistentiæ in parte correspondente ad resistentiæ in arcu A ut ætiam arcuum A ad B quad. tempora in arcubus A & B forent æqualia

Qq 2

per

per Propositionem superiorem. Ideoque resistentia *Aquæ* in arcu *A*, vel *AB* in arcu *B*, efficit excessum temporis in arcu *A* supra tempus in Medio non resistente, & resistentia *BB* efficit excessum temporis in arcu *B* supra tempus in Medio non resistente. Sunt autem excessus illi ut vires efficientes *Ab* & *Bb* quam proxime, id est ut arcus *A* & *B*. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc ex oscillationum temporibus, in Medio resistente in arcubus inæqualibus factarum, cognosci possunt tempora oscillationum in eisdem gravitatis specificæ Medio non resistente. Nam si verbi gratia arcus alter sit altero duplo major, differentia temporum erit ad excessum temporis in arcu minore supra tempus in Medio non resistente, ut differentia arcuum ad arcum minorem.

Corol. 2. Oscillationes breviores sunt magis Isochronæ, & brevissime in eisdem temporibus peraguntur ac in Medio non resistente, quam proxime. Earum vero quæ in majoribus arcubus fiunt, tempora sunt paulo majora, propterea quod resistentia in descensu corporis quæ tempus producit, major sit pro ratione longitudinis in descensu descriptæ, quam resistentia in ascensu sub e-
quante qua tempus contrahitur. Sed & tempus oscillationum tam brevium quam longarum nonnulli producti videtur per motum Medium. Nam corpora tardescunt paulo minus resistuntur pro ratione velocitatis, & corpora accelerata paulo magis quam quæ uniformiter progrediuntur. id adeo quia Medium, eo quem a corporibus accipit motu, in eandem plagam pergendo, in priore casu magis agitatur, in posteriore minus, ac proinde magis vel minus cum corporibus motu conspirat. Pendula igitur in descensu magis resistit, in ascensu minus quam pro ratione velocitatis, & ex utraque causa tempus producit.

Prop. XXVIII. Theor. XXII

Si corpus Funependulum in Cycloide oscillans resistitur in ratione momentorum temporis, erit ejus resistentia ad vim gravitatis ut excessus

effus arcus descensu toto descripti supra arcum ascensu subsequente descriptum, ad penduli longitudinem duplicatam.

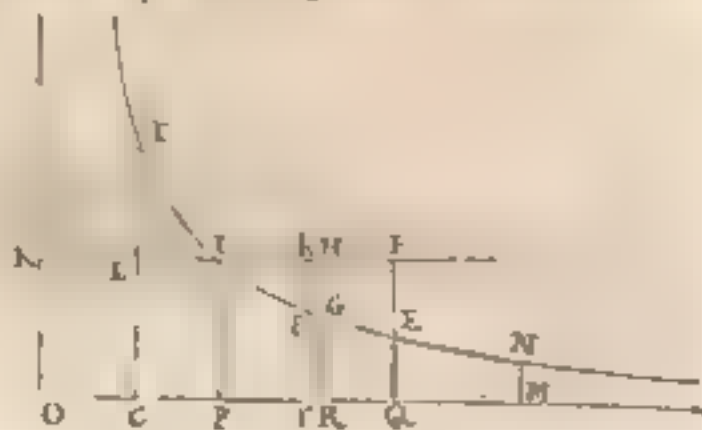
Designet bc arcum descensu descriptum, Ca arcum ascensu descriptum, & Aa differentiam arcuam & stantibus quæ in Propositione XXV. constructa & demonstrata sunt, erit vis qua corpus oscillans urgetur in loco quovis D , ad unam resistantiam ut arcus cD ad arcum cO , quæ semel est differentia illius Aa . Ideoque vis qua corpus oscillans urgetur in Cycloidi principio seu puncto altissimo, id est vis gravitatis, erit ad resistantiam ut arcus Cycloidis inter punctum illud supremum & punctum infimum c ad arcum cO , id est (si arcus duplicentur) ut Cycloidis totius arcus, seu dupla penduli longitudo, ad arcum Aa . *Q. E. D.*

Prop. XXIX. Prob. VII.

Posito quod corpus in Cycloide oscillans resistitur in duplicata ratione velocitatis. invenire resistantiam in locis singulis.

Sit Bc (Fig. Prop. XXV.) arcus oscillatione integra descriptus, sitque c minimum Cycloidis punctum, & cZ semel arcus Cycloidis totius, longitudini Penduli æqualis, & quæritur resistantia corporis in loco quovis

D . Secetur recta infinita OQ in punctis O , c , P , Q ea lege ut (si erigantur perpendiculara OK , CT , PI , QE , centroque O & Asymptotis OK , OQ describatur Hyperbola $TIGE$ secans



perpendiculara CT , PI , QE in T , I & E , & per punctum I agatur KF occurrens Asymptoto OK in K , & perpendicularis CT & QE in L & F) fuerit area Hyperbolica $PIEQ$ ad aream Hyperbolicam

PITC

$PITC$ ut arcus BC descensu corporis descriptus ad arcum Ca ascensu descriptum, & area IEF ad aream ILY ut OQ ad OC . Deinde perpendiculo MN abscindatur area Hyperbolica $PINM$ quæ sit ad aream Hyperbolicam $PIEQ$ ut arcus CZ ad arcum BC descensu descriptum. Et si perpendiculo RG abscindatur area Hyperbolica $PIGR$, quæ sit ad aream $PIEQ$ ut arcus quilibet CD ad arcum BC descensu toto descriptum. erit resistentia in loco D ad vim gravitatis, ut area $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH$ ad aream $PIENM$.

Nam cum vires a gravitate oriundæ quæ idem corpus in locis Z , B , D , a urgetur, sint ut arcus CZ , cb , CD , Ca , & arcus isti sint ut areae $PINM$, $PIEQ$, $PIGR$, $PITC$, exponatur tum arcus tum vires per has areas respectivæ. Sit insuper Dd spatium quod minimum a corpore descendente descriptum, & exponatur idem per aream quam in viam RG paralleli RG , rg comprehensam, & producatu. rg ad b , ut sint $GHLg$, & $RGgr$ contemporanea arearum IGH , $PIGR$ decrementsa. Et areae $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH$ incrementum $GHBg - \frac{Rr}{OQ} IEF$, seu $Rr \times HG - \frac{Rr}{OQ} IEF$, erit ad aream $PIGR$ decrementsum $RGgr$ seu $Rr \times RG$, ut $IGH - \frac{IEF}{OQ}$ ad RG ; adeoque ut $OR \times HG - \frac{OR}{OQ} IEF$ ad $OR \times GR$ seu $OP \times PI$: hoc est (ob æqualia $OR \times HG$, $OR \times HR - OR \times GR$, $ORHH - OPIH$, $PIHR$ & $PIGR + IGH$) ut $PIGR + IGH - \frac{OR}{OQ} IEF$ ad $OPIK$. Igitur si area $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH$ dicatur Y , atque areæ $PIGR$ decrementsum $FGgr$ dicatur, & decrementsum areæ Y ut $PIGR - Y$.

Quævis F designet vim a gravitate oriundam aream describendo CD proportionem, in qua corpus urgetur a F & K pro resistentia ponatur: erit $F - K$ vis tota qua corpus urgetur in D , adeoque

adeoque ut incrementum velocitatis in data temporis particula factum. Est aut in resistentia R (per Hypothesin, ut quadratam velocitatis, & adeo (per Lem II) in augmentum resistentiae ut velocitas & incrementum velocitatis conueniant, id. est ut spatium data temporis particula delectum $\delta t = R$ conueniant, atque adeo, si momentum spatium dicitur, ut $V = R$, id. est, si pro vi V habetur eius exponent $P I G R$, & resistentia R exponatur per aliam aliquam aream Z , ut $P I G R = Z$.

Itur area $P I G R$ per datorum momentorum subtractionem uniformiter decreſcente, crescit area I in ratione $P I G R$.

T , & area Z in ratione $P I G R = T$. Et propterea si area T & Z simul incipiant & sub initio æquales sint, hæc per additionem æqualium momentorum pergent esse æquales, & æqualibus uidem momentis si binde decreſcentes simul evanescunt. Et vicissim, si simul incipiunt & simul evanescunt, æqualia habebunt momenta & semper erunt æquales. Id adeo quia si resistentia Z augeat x , velocitas una cum arcu illo $C a$, qui in ascensu corporis describitur, diminuat, & puncto in quo motus omnis una cum resistentia cessat propius accedente ad punctum C , resistentia eius evanescet quam area T . Et contrarium eveniet ubi resistentia diminuitur.

Jam vero area Z incipit desinere ubi resistentia nulla est, hoc est, in principio & fine motus, ubi arcus $C D$, $C D$ arcibus $C B$ & $C a$ æquantur, adeoque ubi recta $R G$ incidit in rectas $Q E$ & $C T$.

Et area T seu $\frac{OR}{OQ} I E F - I G H$ incipit desinitque ubi nulla est,

adeoque ubi $\frac{OR}{OQ} I E F$ & $I G H$ æqualia sunt. hoc est (per constructionem) ubi recta $R G$ incidit in rectam $Q E$ & $C T$. Proindeque areæ illæ simul incipiunt & simul evanescunt, & propterea semper sunt æquales.

Igitur area $\frac{OR}{OQ} I L F - I G H$ æqualis est areæ Z , per quam resistentia exponitur, & propterea est ad aream $P I N M$ per quam gravitas exponitur, ut resistentia ad gravitatem. *Q. E. D.*

Corol. 1.

Corol. 1. Est igitur resistentia in loco infimo C ad vim gravitatis, ut area $\frac{OP}{OQ}$ IEF ad aream PINM.

Corol. 2. Fit autem maxima, ubi area PIHR est ad aream IEF ut OR ad OQ. Eo enim in casu momentum eius (nimirum $PIGR - T$) evadit nullum.

Corol. 3. Hinc etiam innotebit velocitas in locis singulis quippe quæ est in dimidiata ratione resistentiæ, & ipso motu initio æquatur velocitati corporis in eadem Cycloide ab æque omni resistentia oscillantis.

Cæterum ob difficilem calculum quo resistentia & velocitas per hanc Propositionem inveniendæ sunt, visam est Propositionem sequentem subungere, quæ & generalior sit & ad usus Philosophicos abunde satis accurata.

Prop. XXX. Theor. XXIII.

Si recta AB æqualis sit Cycloidis arcui per quem corpus ab alto descendit, & ad singula eius puncta D etiam in recta DK, quæ sint ad longitudinem Penduli ut visus est, & puncta DK eius correspondentibus ad vim gravitatis duo motus æquales per arcum de cyclo toto descriptum, & arcum ad eum totum perpendente descriptum, ducti in arcum eundem tenentur mutari, & peris erit area BKA B a perpendicularibus omnibus DK occupata, patet proxime.

Exponatur enim tum Cycloidis arcus oratione integra descriptus, per rectam illam sibi æqualem AB, tum arcus qui describeretur in vacuo per longitudinem AB. Bineatur AB in C, & punctum C repræsentabit infimum Cycloidis punctum, & erit CD ut visus a gravitate oriunda, quæ corpus in C secundum Tangentem Cycloidis urgetur, eamque habebit rationem ad longitudinem Penduli quam habet vis in D ad vim gravitatis. Exponatur igitur vis illa per longitudinem CD, & vis gravitatis per longitudinem penduli, & si in D E capiat DK in ea ratione ad longi-

longitudinem penduli quam habet resistentia ad gravitatem, erit DK exponens resistentiae. Centro C & intervallo CA vel CB construatur semicirculus, BE & d . Describet autem corpus tempore quam minimo spatium Dd , & erectis perpendicularis DE , de circumferentiae occurrentibus in E & e , erunt haec ut velocitates quas corpus in vacuo, descendendo a puncto B , requireret in locis D & d . Patet hoc per Prop. LIII Lib. I. Exponantur itaque haec velocitates per perpendicularia illa DE , de ; sitque DF velocitas quam acquirit in D cadendo de



B in Medio resistente. Et si centro C & intervallo CF describatur circulus FfM occurrens rectis de & AB in f & M , erit M locus ad quem deinceps absque ulteriore resistentia ascenderet, & df velocitas quam acquireret in d . Unde etiam si Fg designet velocitatis momentum quod corpus D , describendo spatium quam minimum Dd , ex resistentia Medii amittit, & sumatur CN æqualis Cg erit N locus ad quem corpus deinceps absque ulteriore resistentia ascenderet, & MN erit decrementum altitudinis ex velocitatis illius annihilatione oriundum. Ad df demittatur perpendicularium Fm , & velocitatis DF decrementum fg a resistentia DK genitum, erit ad velocitatis ejusdem incrementum fm a vi CD genitum, ut vis generans DK ad vim generantem CD . Sed & ob similia triangula Fmf , Fhg , FDC , est fm ad fm seu Dd , ut CD ad DF , & ex æquo Fg ad Dd ut DK ad DF . Item Fg ad Fb ut CF ad DF , & ex æquo perturbate Fb seu MN ad Dd ut DK ad CF . Sumatur DR ad $\frac{1}{2}AB$ ut DK ad CF , & erit MN ad Dd ut DR ad $\frac{1}{2}AB$; ideoque summa omnium $MN \times \frac{1}{2}AB$, id est $Aax \frac{1}{2}AB$, æqualis erit summa omnium $Dd \times DR$, id est areæ BKR & Sa , quam rectangula omnia $Dd \times DR$

R r

seu

seu DR & d componunt. Bivalentur Aa & aB in P & O , & erit
 $\frac{1}{2} aB$ seu OB æqualis CP , ideoque DR est ad DK ut CP ad CF
 vel CM , & divini KR ad DR ut PM ad CP . Ideoque cum
 punctum M , ubi corpus vertatur in medio oscillationis loco O , in-
 cidat cuncter in punctum P , & priore oscillationis parte versetur
 inter A & P , posteriore autem inter P & a , utroque in casu æ-
 qualiter a puncto P in partes contrarias errans punctum K cir-
 ca medium oscillationis locum, id est e regione puncti O , puta
 in V , incidet in punctum R , in priore autem oscillationis parte
 jacebit inter K & E , & in posteriore inter K & D , utroque in
 casu æqualiter a puncto R in partes contrarias errans. Proinde
 area quam linea KR describit, priore oscillationis parte jacebit
 extra aream $BRSA$, posteriore intra eandem, adque dimensio-
 nibus lune inde propemodum æquatis inter se, & propterea in
 casu priore addita area $BRSA$, in posteriore eidem subducta, re-
 linquet aream $bKIs$ area $bRSA$ æqualem quam proxime.
 Ergo rectangulum Aax seu AaO , cum sit æquale area
 $BRSA$, erit etiam æquale area $bKIs$ quam proxime. $Q.E.D.$

Corol. Hinc ex lege resistentiæ & arcuum Cs , & b differentia Aa ,
 colligi potest proportio resistentiæ ad gravitatem quam proxime

Nam si uniformis sit resistentia DA , figura aBh & S rectan-
 gulum erit sub Ba & DA , & inde rectangulum sub Ba & Aa
 æqualis erit rectangulo sub Ba & DA & DA æqualis erit Aa .
 Quare cum DA sit exponens resistentiæ, & longitudo penduli ex-
 ponens gravitatis, erit resistentia ad gravitatem ut Aa ad longi-
 tudinem Penduli, omnino ut in Propositione XXVIII. demon-
 stratum est

Si resistentia sit ut velocitas, figura aBh & S Ellipsis erit quam
 proxime. Nam si corpus, in Medio non resistente, oscillatione
 int' ora describeret longitudinem bA , velocitas in loco quovis
 D foret ut circuli diametro AB descripti ordinatum applicata DL .
 Proinde cum bA in Medio resistente & BA in Medio non resi-
 stente, æqualibus circiter temporibus describantur, adeoque ve-
 locitates

locitates in singulis ipsius Ba punctis, sint quam proxime ad velocitates in punctis correspondentibus longitudinis BA , ut est Ba ad BA , erit velocitas DA in Medio resistente ut circuli vel Ellipticos super diametro Ba descripti ordinatim applicata, adeoque figura $BKVI$ Ellipsis, quam proxime. Cum resistentia velocitati proportionalis imponatur, sit OV exponens resistentiae in puncto Medio O , & Fl. pñs, centro O , semiaxis OB , OV descripta, figuram $BKVI$, tunc aequale rectangulum $Aa \times BO$, aequabit quam proxime. Est igitur $Aa \times BO$ ad $OV \times BO$ ut area Ellipticos hujus ad $OV \times BO$, id est Aa ad OV ut area semicirculi, ad quadratum radii sive ut 11 and 7 circiter. Et propterea: . Aa ad longitudinem penduli ut corporis oscillantis resistentia in O ad eandem gravitatem.

Quod si resistentia DK sit in duplicata ratione velocitatis, figura $BKVI$ Parabola erit verticem habens V & axem OV , ideoque aequalis erit duabus tertis partibus rectanguli sub Ba & OV quam proxime. Est igitur rectangulum sub Ba & Aa aequale rectangulo sub Ba & OV , adeoque OV aequalis $\frac{2}{3} Aa$, & propterea corporis oscillantis resistentia in O ad ipsius gravitatem ut $\frac{2}{3} Aa$ ad longitudinem Penduli.

Atque has conclusiones in rebus practicis abunde satis accuratas esse censco. Nam cum Ellipsis vel Parabola congruat cum figura $BKVI$ in puncto medio V , hae si ad partem alterutram BKV vel VIV excedit figuram illam, deficiet ab eadem ad partem alteram, & sic eadem aequabitur quam proxime.

Prop. XXXI. Theor. XXIV.

Si corporis oscillantis resistentia in singulis arcuum descriptorum partibus proportionalibus augeatur vel minuat in data ratione, differentia inter arcum descensu descriptum & arcum subsequente ascensu descriptum, augebitur vel diminuetur in eadem ratione quamproxime.

Oritur enim differentia illa ex retardatione Penduli per resi-

stentiam Medii, adeoque est ut retardatio tota eique proportionalis resistentia retardans. In superiore Propositione rectangulum sub recta $\frac{1}{2} a B$ & arcum illorum CB , Ca differentia Aa , æqualis erat areæ $BK T$. Et area illa, si maneat longitudo $a B$, augetur vel diminuitur in ratione ordinatum applicatarum DK , hoc est in ratione resistentiæ, adeoque est ut longitudo $a B$ & resistentia conjunctum. Proindeque rectangulum sub Aa & $\frac{1}{2} a B$ est ut $a B$ & resistentia conjunctum, & propterea Aa ut resistentia. *Q. E. D.*

Corol. 1. Unde si resistentia sit ut velocitas, differentia arcuum in eodem Medio erit ut arcus totus descriptus: & contra.

Corol. 2. Si resistentia sit in duplicata ratione velocitatis, differentia illa erit in duplicata ratione arcus totus, & contra.

Corol. 3. Et universaliter, si resistentia sit in triplicata vel aliqua ratione velocitatis, differentia erit in eadem ratione arcus totius; & contra.

Corol. 4. Et si resistentia sit partim in ratione simplici velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicata, differentia erit partim in ratione arcus totus & partim in eius ratione duplicata; & contra. Eadem erit lex & ratio resistentiæ pro velocitate, quæ est differentiæ illius pro longitudine arcus.

Corol. 5. Ideoque si, pendulo inæquales arcus successive describente, inveniri potest ratio incrementi ac decrementi resistentiæ huius pro longitudine arcus descripti, habebitur etiam ratio incrementi ac decrementi resistentiæ pro velocitate majore vel minore.

S E C T. VII.

De Motu Fluidorum & resistentia Projectilium.

Prop. XXXII. Theor. XXV.

Si corporum Systemata duo ex equali particularum numero constent, & particule correspondentes similes sint, singula cu uno Systemate singulis in altero, ac datam habeant rationem densitatis ad invicem, & inter se temporibus proportionalibus similiter moveri incipiant, (ea inter se quæ in uno sunt Systemate & ea inter se quæ sunt in altero) & si non tanguant se mutuo quæ in eodem sunt Systemate, nisi in momentis reflexionum, neque attrahant vel fugant se mutuo, nisi viribus acceleratricibus quæ sunt ut particularum correspondentium diametri inverse & quadrata velocitatum directe: dico quod Systematum particule ille pergent inter se temporibus proportionalibus similiter moveri; & contra.

Corpora similia temporibus proportionalibus inter se similiter moveri dico, quorum situs ad invicem in fine temporum illorum semper sunt similes: puta si particule unius Systematis cum alterius particulis correspondentibus conferantur. Unde tempora erunt proportionalia, in quibus similes & proportionales figurarum similiarum partes a particulis correspondentibus describuntur. Igitur si duo sint ejusmodi Systemata, particule correspondentes, ob similitudinem utraque motuum, pergent similiter moveri usque donec sibi mutuo occurrant. Nam si nullis agitantur viribus, progrediantur uniformiter in lineis rectis per motus Leg. I. Si viribus aliquibus se mutuo agitant, & vires illæ sint ut particularum correspondentium diametri inverse & quadrata velocitatum directe, quoniam particularum situs sunt similes & vires proportionales, vires totæ quibus particule correspondentes agitantur,

gicantur, ex viribus singulis agitantibus (per Legum Corollarium secundum) compositæ, similes habebunt determinationes, perinde ac si centra inter particulas similiter sita respicerent, & erant vires illæ totæ ad invicem ut vires singulæ componentes, hoc est ut correspondentium particularum diametri inverte, & quadrat. velocitatum directe & propterea ciliant ut correpse d. nter particule figuras similes describere pergant. Hæc ita se habebunt per Corol. 1. 2, & Prop. IV. si modo centra illa quiescant. Sin moveantur, quoniam ob translationum similitudinem, similes manent eorum situs inter systematum particulas, similes induentur mutationes in figuris quas particulae describunt. Similes igitur erunt correspondentium & similium particularum motus namque ad occurrentes suos priores, & propterea similes occurrentes, & similes reflexiones, & tandem (per jam contenta) similes motus inter se, donec iterum in se mutuo incidant, & sic demum in infinitum. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si corpora duo quævis, quæ similia sint & ad systematum particulas correspondentes similes sita, inter ipsas temporibus proportionalibus similiter moveri incipiant, sintque eorum distantias ad invicem ut distantias correspondentium particularium, hæc pergent temporibus proportionalibus similiter moveri. Est enim eadem ratio partium majorum systematis utriusque atque particularium.

Corol. 2. Et si similes & similiter posite systematum partes omnes quiescant inter se. & earum duæ, quæ ceteris majores sint, & non mutuo in utroque systemate correpseant, secundum lineas similiter sitas totam cum motu utcumque moveri incipiant: hæc similes in reliquis systematum partibus excitabunt motus, & pergent inter ipsas temporibus proportionalibus similiter moveri, atque adeo spatia diametris suis proportionalia describere.

Prop. XXXIII. Theor. XXVI.

Iisdem positis, dico quod Systematum partes majores resistuntur in ratione composita ex duplicata ratione velocitatum suarum & duplicata ratione diametrorum & ratione densitatis partium Systematum.

Nam resistentia oritur partim ex viribus centripetis vel centrifugis quibus particule systematum se mutuo agunt, partim ex occurribus & reflexionibus particularum & partium majorum. Prioris autem generis resistentia sunt ad invicem ut vires totae motrices a quibus oriuntur, id est ut vires totae acceleratrices & quantitates materiae in partibus correspondentibus, hoc est (per Hypothesin) ut quadrata velocitatum directe & distantiae particularum correspondentium inverse & quantitates materiae in partibus correspondentibus directe. Ideoque (cum distantiae particularum systematis unus sint ad distantias correspondentes particularum alterius, ut diameter particulae vel partis in systemate priore ad diametrum particulae vel partis correspondentis in altero, & quantitates materiae sint ut densitates partium & cubi diametrorum) resistentiae sunt ad invicem ut quadrata velocitatum & quadrata diametrorum & densitates partium systematum. *Q. E. D.* Posterioris generis resistentia sunt ut reflexionum correspondentium numeri & vires conjunctae. Numeri autem reflexionum sunt ad invicem ut velocitates partium correspondentium directe, & spatia inter eorum reflexiones inverse. Et vires reflexionum sunt ut velocitates & magnitudines & densitates partium correspondentium conjunctae, id est ut velocitates & diametrorum cubi & densitates partium. Et conjunctis his omnibus rationibus, resistentiae partium correspondentium sunt ad invicem ut quadrata velocitatum & quadrata diametrorum & densitates partium conjunctae. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur si systemata illa sint Fluida duo Elastica ad modum Aeris, & partes eorum quiescant inter se: corpora autem

tem duo similia & partibus fluidorum quoad magnitudinem & densitatem proportionalia, & inter partes illas similiter posita, secundum lineas similiter positas utcumque projiciantur; vires autem motrices, quibus particule fluidorum se mutuo agitant, sint ut corporum projectorum diametri inverse, & quadrata velocitatum directe. corpora illa temporibus proportionalibus similes excitabunt motus in Fluidis, & spacia similia ac diametris suis proportionalia describent.

Corol. 2. Proinde in eodem Fluido projectile velox resistitur in duplicata ratione velocitatis quam proxime. Nam si vires, quibus particule distantes se mutuo agitant, augerentur in duplicata ratione velocitatis, projectile resisteretur in eadem ratione duplicata accurate, ideoque in Medio, cujus partes ab invicem distantes sese viribus nullis agitant, resistentia est in duplicata ratione velocitatis accurate. Sunt igitur Media tria *A, B, C* ex partibus similibus & equalibus & secundum distantias æquales regulariter dispositis constantia. Partes Mediorum *A* & *B* iugiant se mutuo viribus quæ sint ad invicem ut *I* & *V*, illæ Medi *C* ejusmodi viribus omnino destituantur. Et si corpora quatuor æqualia *D, E, F, G* in his Mediis moveantur, priora duo *D* & *E* in prioribus duobus *A* & *B*, & altera duo *F* & *G* in tertio *C*, sitque velocitas corporis *D* ad velocitatem corporis *E*, & velocitas corporis *F* ad velocitatem corporis *G*, in dimidiata ratione virium *I* ad vires *V*, resistentia corporis *D* erit ad resistentiam corporis *E*, & resistentia corporis *F* ad resistentiam corporis *G* in velocitatum ratione duplicata, & propterea resistentia corporis *D* erit ad resistentiam corporis *F* ut resistentia corporis *E* ad resistentiam corporis *G*. Sunt corpora *D* & *F* æquavelocia ut & corpora *E* & *G*; & augendo velocitates corporum *D* & *F* in ratione quacunque, ac diminuendo vires particularum Medi *B* in eadem ratione duplicata, accedet Medium *B* ad formam & conditionem Medi *C* pro lubet, & ideo resistentiæ corporum æqualium & æquavelocum *E* & *G* in his Mediis, perpetuo accedent ad æqualitatem

litem, ita ut earum differentia evadat tandem minor quam data quævis. Proinde cum resistentia corporum D & F sit æquæ invicem ut resistentiæ corporum E & G , accedat etiam hæc similiter ad rationem æqualitatis. Corporum scilicet D & F , ubi velocissime moventur, resistentia sunt æquali quamproxime & propterea cum resistentia corporis F sit in data ratione velocitatis, erit resistentia corporis D in eadem ratione quamproxime. $Q. E. D.$

Corol. 3. Sicut corpus in Fluido quovis Elastico velocissime moventis eadem fere est resistentia ac si partes Fluidi viribus suis centrifugis detinerentur, & per mutuo noningerent: tumodo Fluidi vis Elastica ex particularum viribus centrifugis oritur.

Corol. 4. Proinde cum resistentiæ tumbum & æquvelocium corporum, in Medio eorum partes distantes se mutuo non tingunt, sint ut quadrata diametrorum, sunt etiam æquvelocium & celerissime moventium corporum resistentiæ in Fluido Elastico ut quadrata diametrorum quamproxime.

Corol. 5. Et cum corpora similia, æqualia & æquvelocia, in Medio eisdem densitatis, quorum particule se mutuo non tingunt, siue particule hæc sint plures & minores, seu pauciores & majores, in æqualem materiam quantitatem temperata æqualiter impingant, cujus æqualem motus quantitatem impingant, & vicinam (per motus Legem tertiam) æqualem ab eadem reactiõnem percipiant, hoc est æqualem resistenter marquantur est etiam qualitas densitatis Fluidi Elastici vel velocissime moventis, æquales sunt eorum resistentia quamproxime, siue Fluidi illi ex particulis crassioribus constent, seu ex tenuium liquidioris constituentur. Ex Media tubilitate resistentia propter recedentem motorum non multum denaturatur.

Corol. 6. Cum autem particule Fluidorum, propter vires quovis se mutuo tingunt, motu nequeunt quin tum illi agentur particularibus in vicinitate atque adeo difficilius moveantur inter se quam si vires illis detulerentur, & quo majores sunt, eorum

vires centrifugæ, eo difficilius moveantur inter se: manifestum est, videretur quod propterea in tali fluido eo difficilius movebuntur, quo vires illæ sunt intensiores, & propterea si corporis velocissimi in superioribus Corollariis velocitas diminuat, quoniam resistentia diminueretur in duplicata ratione velocitatis, si modo vires particularum in eadem ratione duplicata diminuerentur, vires autem nullatenus diminuuntur, manifestum est quod resistentia diminuetur in ratione minore quam duplicata velocitatis.

Corol. 7. Porro cum vires centrifugæ eo nomine ad augendam resistentiam conducant, quod particule motus suos per fluidum ad maiorem a se distantiam per vires illas propagent, & cum distantia illa minore, habeat rationem ad maiora corpora manifestum est quod augmentum resistentiæ ex viribus illis oriundum in corporibus maioribus minus sit momenti, & propterea, quo corpora sunt maiora ex maiori accurate resistentia tardius accedunt de cetero in duplicata ratione velocitatis.

Corol. 8. Ubi etiam ratio illa duplicata maiori accurate obinebit in fluidis quæ pari densitate & vi elastica, ex particulis immixtis continent. Nam si corpora illa maiora diminuuntur, & particule elasticæ, manente eius densitate & vi elastica, demerantur in eadem ratione, manet et eadem ratio resistentiæ quæ prius erat ex precedentibus facile colligitur.

Corol. 9. Hæc omnia ita se habent in fluidis, quorum vis elastica ex particularum viribus continetur, & originem ducit. Quod si vis illa abunde oriatur, velut ex particularum expansione ad instar Laniæ vel ramorum a herbarum, aut ex alia quavis causa, quæ motus particulæ inter se recedant minus libere: resistentia, oriunda a visco sita viscositate, erit maior quam in superioribus Corollariis.

Prop. XXXIV. Theor. XXVII.

Quæ in precedentibus duabus Propositionibus demonstrata sunt, obtinent ubi particule Systematum se mutuo contingunt, si modo particule illæ sint summe lubricæ.

Concipe particulas vi ibas quibusdam se mutuo $f, c, c,$ & vires illas in æccetui ad superficiem particularum adferri laetantur, & contra, in recessu ab eisdem eccetui dimitti & statim evanescere. Concipe etiam Systemata compressa, ita ut partes eorum se mutuo contingant, nisi quatenus vires illæ contactum impediunt. Sunt autem spatia per quæ vires particularum distendantur quam angustissima, ita ut particule se mutuo quam proximè contingant: & motus particularum inter se idem erant quam proxime ac si se mutuo contingerent. Eadem facilitate labentur inter se ac si essent summe lubricæ, & se impugnant in se mutuo resiliunt ab invicem ope virium præfatarum, perinde ac si essent Elasticæ. Ita præ motus erant idem in utroque casu, nisi quatenus per exigentia particularum se se non contingentiam intervalla diversitatem efficiant: quæ quidem diversitas diminuendo particularum intervalla diminui potest in infinitum. Jam vero quæ in precedentibus duabus Propositionibus demonstrata sunt, obtinent in particulis se se non contingentibus, idque hec intervalla particularum, diminuendo spatia per quæ vires distendantur, diminuuntur in infinitum. Et propterea eadem obtinent in particulis se contingentiis, exceptis solum differentiis quæ tandem differentibus quibusvis datis minores evadant. Vico igitur quod accurate obtinent. Si negas, assigna differentiam in casu quocunque. Atqui jam probatum est quod differentia minor sit quam data quævis. Ergo differentia falso assignatur, & propterea nulla est. Q. E. D.

Corol. 1. Igitur si Systematum duorum partes omnes quiescant inter se, exceptis duabus, quæ cæteris majores sint & sibi

mutuo correfpondeant inter ceteras fimiliter fitæ. Hæ fecundum
 in a fimiliter potitas utrunque projectæ uniles excitabunt mo-
 tus in Systematib; & temporibus proportionalibus pergent spa-
 tia unilia & diametris suis proportionalia describere, & resi-
 ſtæ ut in ratione compoſita ex duplicata ratione velocitatum
 & duplicata ratione diametrorum & ratione denſitatis Systema-
 tum

Corol. 2 Unde ſi Systemata illa ſint Fluida duo ſimilia, &
 eorum partes duæ maiores ſint corpora in iſdem projecta ſint
 autem Fluido, un particule ſumme lubricæ, & quoad ma-
 nitudinem & denſitatem proportionales corporibus pergent corpora
 temporibus proportionalibus ſpatia ſimilia & diametris ſuis pro-
 portionalia deſcribere, & reſiſtentur in ratione Corollario ſuperi-
 ore definita.

Corol. 3 Preinde in eodem Fluido Projectæ magnitudine
 datæ reſiſtentur in duplicata ratione velocitatis.

Corol. 4 At ſi particule Fluidi non ſint ſumme lubricæ, vel
 ſi visibus quibuscunque ſumme aptent, quibus motuum liberi-
 tas denegatur. Projectilia tardiora difficiliter ſuperabunt reſiſten-
 tiam & propterea major reſiſtentur quam in velocitatis ratione
 duplicata.

Prop. XXXV. Theor. XXVIII

*Si Ellipſis & Sphæra equalibus diametris deſcriptæ, in Medio
 ſolido & Fluido æquæ plene & cylindricæ, æquali cum velo-
 citate æquæ motu reſiſtentur. erit reſiſtentia Globi duplo minor quam re-
 ſiſtentia Ellipſidis.*

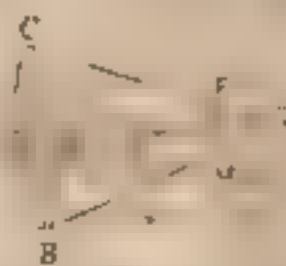
Non enim eadem reſiſtentia (per Corol. 3 Prop. XXXIII)
 eadem eſt quæ proxime ac ſi partes Fluidi visibus nullis ſe mu-
 tuo ſequeantur ſuperamus partes Fluidi cuiusmodi visibus deſtrui-
 tur per partes eandem uniformiter deperit. Et quæntam actio
 Medium corpus eadem eſt (per Legum Corol. 5) ſive corpus
 in Medio quæſcente moveatur, ſive Medium particule eadem cum
 veloci-

b E ut effectus particulae in globum ad effectum particulae in cylindrum. Et propterea Solidum quod a rectis omnibus *b H* occupatur erit ad solidum quod a rectis omnibus *b E* occupatur, ut effectus particularum omnium in globum ad effectum particularum omnium in Cylindrum. sed solidum prius est Paraboloidis vertex *P*, axe *C A* & latere recto *C A* descriptum, & solidum posterius est cylindrus Paraboloidi circumscriptus, & notum est quod Paraboloides sit similis cylindri circumscripti. Ergo vis tota Medii in globum est duplo minor quam vis tota in Cylindrum. Et propterea si particula Medii quaelibet, & cylindrus ac globus aequali cum velocitate moverentur, foret resistentia globi duplo minor quam resistentia cylindri. *Q. E. D.*

Scholium.

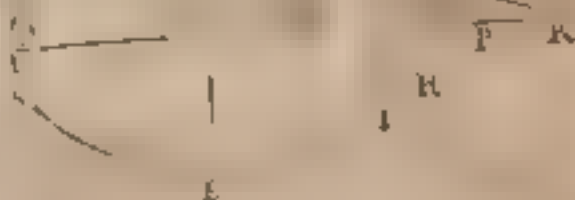
Eadem methodo si inter alia inter se quoad resistentiam comparari possint, eaque inveniri quae ad notus tunc in Medii resistentibus continuandos aptiores sunt. Ut si bane et eadem *CLBH*, quae centro *O*, radio *OC* describitur, & altitudinis *OD*, construendum sit solidum conicum *CBG*, quod quantum eadem basi & altitudinis eadem situm sit & secundum plagam maximam situm sit *D* pro resistentiam tractum sit minimum resistatur. bane altitudinem *OD* in *Q* & producat, *OQ* ad *S* ut sit *QS* aequalis *QC*, & erit *S* vertex conici, cuius tractum queritur.

Unde obiter cum angulus *C S B* semper sit acutus, consequens est, quod si solidum *ADBL* convolutione figura Elliptica vel Ovale *ADBL* circa axem *AB* facta generetur, & tangatur figura generata a rectis tribus *FG*, *CH*, *HI* in punctis *F*, *B* & *I*, ea lege ut *CH* sit perpendiculari ad axem in puncto contactus *B*, & *FG*, *HI* cum eadem *CH* contineant angulos *FCB*, *BHI* graduum 135 solidum, quod convolutione figurae *ADFGHIE* circa axem



em eundem CB generatur, minus resistitur quam solidum prius;
si modo utrumque secundum plagam axis sui AB progrediatur,
& utriusque terminus B precedat. Quam quidem proposi-
tionem in construendis Navi-
bus non inutilem futuram
esse cenico.

Quod si figura $DNFB$
ejusmodi sit ut, si ab eius
puncto quovis N ad axem
 AB demittatur perpendi-
culum NM , & a puncto
dato C ducatur recta CR



quæ parallela sit rectæ figuram tangenti in N , & axem productum
fecit in R , facit MM ad C H ut G R int. ad 4 b R x G b q . So-
lidum quod figuratur per revolutionem circa axem A b tacta deter-
bitur, in Medio raro & I. datus ab A versus b velocissime mo-
vendo, minus resistit quam a rad. quodvis eadem longitudo
& latitudinis deceptum solidum circulare.

Prop. XXXVI Prob. VIII.

Invenire existimationem corporis sphaerici in Fluidi raro & Elastico
 exobscuro & prolixitate. (Vide l. 2. pag. 325)

Desuper ab *H* corpus Sphaericum centro *C* ut a centro *C* *A* descipiam. Producam *C* *A* promod *S* deinde ad *R*, ut sit *AS* pariteria ipius *C* *A*, & *C* *R* sit ad *C* *S* ut centrum corporis Sphaerici ad determinatam Mene. Ad *C* *R* erigantur perpendiculara *TC*, *KX*, centroque *K* & Asymptotis *C* *R*, *R* *X* describatur Hyperbeliqua *PP'*. In *C* *K* capiatur *CI* longitudo *C* conivis, & erigatur perpendicularum *II* ab *C* *I* us arcum Hyperbolicum *PCI*, & sit *C* *Z* latus huius arcus apponente ad rectam *PC*. Dico quod motus quem globus describenda parum *C* *Z*, ex resistentia Mechanica, erit ad eum motum totum sub initio ut longitudo *CI* ad longitudinem *CK* quemproxime. Nam

Nam (per motum Legem tertiam) motus quem cylindrus GNOQ circa globum descriptus impingendo in Medii particulas amitteret, æqualis est motui quem imprimeret in eadem particulas. Ponamus quod particula singulari reflectantur a cylindro, & ab eodem ea cum velocitate resiliunt, quacum cylindrus ad ipsas accedebat. Nam talis erit reflexio, per Legum Corol. 3. si modo particula quam minime sint, & vi Elastica quam maxima reflectantur. Velocitas igitur quacum a cylindro resiliunt, addita veloci tati cylindri componet totam velocitatem duplo maiorem quam velocitas cylindri, & propterea motus quem cylindrus ex reflexione particulae cuiusque amittit, erit ad motum totum cylindri, ut particula duplicata ad cylindrum. Proinde cum densitas Medii sit ad densitatem cylindri ut CS ad CR; ut C t ut longitudo tempore quam minimo a cylindro descripta, erit motus eo tempore amittis ad motum totum cylindri ut $2 C t \times C S$ ad $A I \times C R$. Ea enim est ratio materiae Medii, a cylindro protulæ & reflectæ, ad massam cylindri. Unde cum globus sit dux tertie partes cylindri, & resistentia globi (per Propositionem superiorem) ut duplo minor quam resistentia cylindri, erit motus quem globus describendo longitudinem I amittit ad motum totum globi ut $C t \times C S$ ad $A I \times C R$, sive ut C t ad C R. Fugitur perpendiculari tæ Hypothetæ occurrens in w, & (per Corol. 1. Prop. V. Lib. II) si corpus describendo longitudinem arcem C t æ P proportionalem, amittit motus sui totus C R partem quamvis C t, idem describendo longitudinem arcem C I æ P proportionalem, amittet motus sui partem C I. Sed longitudo C t æqualis est $\frac{C P \times t}{C P}$, & longitudo O Z (per Hypothetam) æqualis est $\frac{C P I I}{C P}$, adeoque longitudo C t est ad longitudinem C Z ut area C P æ t ad aream C P I I. Et propterea cum globus describendo longitudinem quam minimam C t amittit motum sui partem C t, erit motus sui ad totum ut C t ad C R, id est describendo

describendo longitudinem aliam quamvis CZ , amittet motus sui partem quæ sit ad totum ut CT ad CR . *Q. E. D.*

Corol. 1. Si datus corporis velocitas sub initio, dabitur tempus quo corpus, describendo spatium Ct , amittet motus sui partem Ct : & inde, dicendo quod resistentia sit ad vim gravitatis ut ista motus pars amissa ad motum, quem gravitas Globi eodem tempore generaret; dabitur proportio resistentiæ ad gravitatem Globi.

Corol. 2. Quoniam in hoc determinandis supposui quod particule Fluidi per vim suam Elasticam quam maxime a Globo reflectantur, & particularum sic reflexarum impetus in Globum duplo major sit quam si non reflecterentur manifestum est quod in Fluido, cujus particule vi omni Elastica aliæque omni vi reflexiva destituantur, corpus Sphæricum resistentiam duplo minorem patietur, adeoque eandem velocitatis partem amittendo, duplo longius progredietur quam pro constructione Problematis hujus superius allata.

Corol. 3. Et si particularum vis reflexiva neque maxima sit neque omnino nulla, sed mediocrem aliquam rationem teneat: resistentia pariter, inter limites in constructione Problematis & Corollario superiore politos, mediocrem rationem tenebit.

Corol. 4. Cum corpora tarda paulo magis resistantur quam pro ratione duplicata velocitatis: hæc describendo longitudinem quamvis CZ amittent majorem motus sui partem, quam quæ sit ad motum suum totum ut CT ad CR .

Corol. 5. Cognita autem resistentia corporum celerissimorum, innotescet etiam resistentia tardorum; si modo lex decrementi resistentiæ pro ratione velocitatis inveniri potest.

Prop. XXXVII. Prob. IX.

Aque de vase dato per foramen effluentis de finire motum.

Si vas impletur aqua, & in fundo perforetur ut aqua per foramen defluat, manifestum est quod vas si fuerit pondus aquae totius, dimpto pondere partis illius quod toramini perpendiculariter minuet. Nam si toramen obstructo aliquo occluderetur, obstaculum sustineret pondus aquae ibi perpendiculariter incumbentis, & tandem vas sustineret pondus aquae reliquae. Sublato autem obstaculo, tandem vas eadem aquae pressione coelestis ipsius pondere urgebatur ac pressus, & pondus quod obstructum sustinebat, cum iam non sustineatur, laxatur ut aqua defluat, & per toramen defluat.

Utrum conueniens est, quod motus aquae totius effluentis sit eue qualem pondus aquae toramini perpendiculariter incumbentis generare possit. Nam aqua particulae ut aquae quae pondere suo, quatenus non impeditur, defluat, usque motu uniformiter acceleratur, & quatenus impeditur, impeditur obstaculo. Obstructionem autem vel vas est tandem, vel a per toramen defluens, & propterea respondeat ipsius illi, quatenus vas autem non sustinet, ut ex utraque defluat, & ut ex utraque proportionalem per se aere.

Defluat autem aqua per toramen, & ad toramen aquae toramini perpendiculariter incumbentis, P pondus eius, At quantitate eius, S spatium quod dato quovis tempore t in vacuo huiusmodi defluat, & V velocitatem quam in fine temporis huiusmodi defluat. & motus ipsius aquae At aquae est motus aquae totae eodem tempore effluentis. Si velis, ut quacumque est t dato ex de toramine, ad velocitatem V ut defluat, & eam aquae velocitatem V debere possit tempore $2t$, aqua effluens eodem tempore, velocitate V a V , debere possit per spatium $\frac{2d}{e}$. Et propterea columna aquae cui longitudo

fit $\frac{2d}{e} S$ & latitudo eadem quæ foraminis, posset eo tempore defluendo egredi de vase, hoc est columna $\frac{2d}{e} SF$. Quare motus $\frac{2dd}{ee} SFT$, qui fiet dicendo quantitatem aquæ effluentis in velocitatem suam, hoc est motus omnis tempore effluxus & huius generis æquabitur motui $AT \times V$. Et si æquales illi motus applicentur ad FF , fiet $\frac{2dd}{ee} S$ æqualis A . Unde est dd ad e e ut A ad $2S$, & d ad e in dimidiata ratione A ad S . Est igitur velocitas quæcum aqua exit e foramine, ad velocitatem quam aqua cadens, & tempore T cadendo describens spatium S acquireret, ut altitudo aquæ foraminis perpendiculariter incumbens, ad medium proportionale inter altitudinem illam duplicatam & spatium illud S , quod corpus tempore T cadendo describeret.

Igitur si motus illi tortum vertantur, quoniam aqua velocitate V ascenderet ad altitudinem illam S de qua deciderat, & altitudines (uti notum est) sint in duplicata ratione velocitatum: aqua effluens ascenderet ad altitudinem $\frac{1}{2} A$. Et propterea quantitas aquæ effluentis, quo tempore corpus cadendo describere posset altitudinem $\frac{1}{2} A$, æqualis erit columnæ aquæ totius AF foraminis perpendiculariter incumbentis.

Cum autem aqua effluens, motu suo sursum verso, perpendiculariter tangeret ad dimidiam altitudinem aquæ foraminis incumbentis, consequens est quod si egrediatur oblique per canalem non latus vatis, describet in spatii non resistentibus Parabolam cuius latus rectum est altitudo aquæ in vase supra canalis orificium, & cujus diameter horizonti perpendicularis ab orificio illo ducitur, atque ordinata applicata parabolæ sunt axi canalis.

Hæc omnia de Fluido turbulento intelligenda sunt. Nam si aqua ex partibus crassioribus consistet, hæc tardius effluet quam pro ratione superius assignata, præterea si foramen angustum sit per quod effluit.

Denique si aqua per canalem horizonti parallelum egredietur, quoniam fundum valis integrum est, & eadem aquae incumbens pressione ubique ægetur ac si aqua non efflueret, vas sustinebit pondus aquae totius, non obstanti effluxu, sed latus vas de quo effluit non sustinebit pressionem illam omnem, quam sustineret si aqua non efflueret. Tollitur enim pressio partis illius ubi perforatur: quæ quidem pressio æqualis est ponderi columnæ aquæ, cuius basis foramen æquatur & altitudo eadem est quæ aquæ totius supra foramen. Et propterea si vas, ad modum corporis penduli, filo prælongo a clavo suspendatur, hoc, si aqua in plagam quamvis secundum lineam horizontalem effluit, recedet semper a perpendiculari in plagam contrariam. Et par est ratio motus pilarum, quæ Pulvere tormentario madefacto implentur, & materia in flammam per foramen paulatim expirante, recedunt a regione flammæ & in partem contrariam cum impetu feruntur.

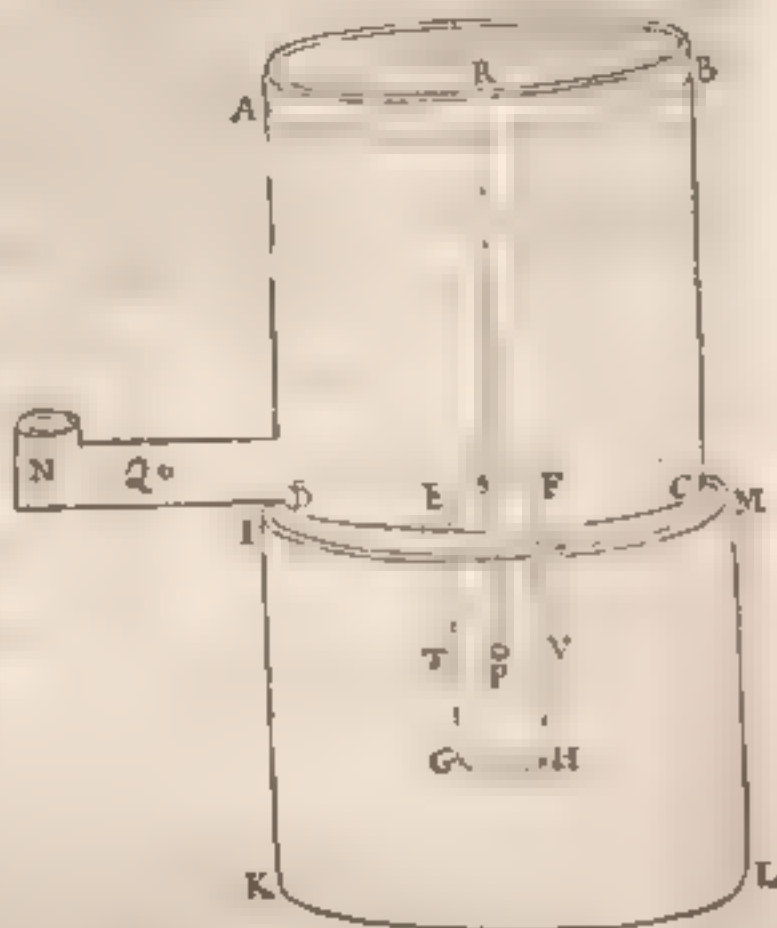
Prop. XXXVIII. Theor. XXIX.

Corporum Sphæricorum in Medius quibusque Fluidissimis resistantiam in anteriore superficie deprimere.

Defluat aqua de vase Cylindrico $ABCD$, per canalem Cylindricum $EFGH$, in vas interius $IKLM$, & inde effluit per valis marginem Ist . Sit autem margo ille ejusdem altitudinis cum vase superius fundo CD , eo ut aqua per totum canalem interiorum cum motu descendat, & in medio canalis collocetur Globus P , sitque PR altitudo aquæ supra Globum, & SR ejusdem altitudo supra fundum valis. Suspendatur autem Globus filo tenuissimo IF , lateribus canalus hinc inde affixo. Et manifestum est per proportionem superiorem, quod quantitas aquæ dato tempore defluentis erit ut amplitudo foraminis per quod defluit, hoc est, si Globus tollatur, ut canalus orificium. sin Globus adsit, ut spatium undique inter Globum & canalem. Nam velocitas aquæ defluentis (per superiorem Propositionem) ea erit quam

quam corpus cadendo, & casu suo describendo dimidiam aquæ altitudinem SR , acquirere posset: adeoque eadem est sive Globus tollatur, sive adsit. Et propterea aqua defluens erit ut amplitudo spatii per quod transit. Certe transitus aquæ per spatium angustius facilior esse nequit quam per spatium amplius, & propterea ve-

locitas ejus ubi Globus adest, non potest esse major quam cum tollitur: ideoque major aquæ quantitas, ubi Globus adest, non effluet quam pro ratione spatii per quod transit. Si aqua non sit liquor subtilissimus & fluidissimus, hujus transitus per spatium angustius, ob crassitudinem particularum, erit aliquanto tardior at liquorem fluidissimum esse hic supponimus. Igitur quantitas aquæ, cujus descensum Globus dato tempore impedit, est ad quantitatem aquæ quæ, si Globus tolleretur, eodem tempore descenderet, ut basis Cylindri circa Globum descripti ad orificium canalis; sive ut quadratum diametri Globi ad quadratum diametri cavitatis canalis. Et propterea quantitas aquæ cujus descensum Globus impedit, æqualis est quantitati aquæ, quæ eodem



tempore

tempore per foramen circulare in fundo vasis, ba si Cylindri illius æquale, descendere posset, & cuius descensus per fundi partem quamvis circularem basi illi æqualem impeditur.

Jam vero pondus aquæ, quod vas & Globus coniunctum sustinent, est pondus aquæ totius in vase, præter partem illam quæ aquam defluentem accelerat, & ad eum motum celerandum facit, quæque, per Propositionem superiorem, æqualis est pondi columnæ aquæ cuius basis æquatut spatio inter Globum & canalē per quod aqua defluit, & altitudo eadem cum altitudine aquæ supra latum vasis, per lineam S K denotata. Vasis igitur fundum & Globus coniacet in sustinent pondus aquæ totius in vase sibi ipsi perpendiculariter imminuentis. Unde cum fundum vasis sustineat pondus aquæ sibi perpendiculariter imminuentis, reliquum est ut Globus etiam sustineat pondus aquæ sibi perpendiculariter imminuentis. Globus quidem non sustinet pondus aquæ illius stagnantis & sibi oblique omni motu incumbens, sed aqua deflenti resistendo impedit eam in tantis potens, adeoque vim aquæ deflantis sustinet pondus illi æqualem. Nam impedit decedentem & effluxum quantitatis aquæ quem pondus illud accurate efficeret si Globus tolleretur. Aqua pondere suo, quatenus decedens eius impeditur, urget obstaculum omne, idēque obstaculum, quatenus decedentem aquæ impedit, vim sustinet æqualem pondus quo decedens ille efficeretur. Globus autem decedentem quantitatis aquæ impedit, quem pondus columnæ aquæ sibi perpendiculariter incumbens effecere posset, & propterea vim aquæ decedentis sustinet pondus illi æqualem. Actio & reactio aquæ per motum. Legem tertiam æquantur inter se, & in plagas contrarias diriguntur. Actio Globi in aquam descendentem, ad eius descensum impediendum, in superiora diriguntur, & est ut decedendi motus impeditus, eique resistendo adæquate tollitur & propterea actio contraria aquæ in Globum æqualis est vi quæ motum eundem vel tollere vel generare possit, hoc

hoc est ponderi columna aquæ, quæ Globo perpendiculariter im-
minet & cuius altitudo est R S.

Si jam canalis orificium superius obstruatur, sic ut aqua des-
cendere nequeat, Globus quidem, pondere aquæ in canali & vale
interiore I A L M stagnans, premitur indigne, sed non ob-
stante pressione illa, nequidem sic specifica gravitatis cum aqua,
quiescit. Pressio illa Globum nullam vim potens impellit. Et
propterea ubi canalis aperitur & aqua de vâle superiore descendit,
vis visus, quæ Globum impellitur deorsum, oriatur ab aqua illius
descendens, quæ eadem æqualis erit ponderi columna aquæ, cuius al-
titudo est A S & diameter eadem quæ Globi. Porro, si autem illud,
quo tempore data qualivis aquæ columna per totum anulum Cy-
lindricæ Globum descriptæ æquale, & ab eo Globo circumferen-
tæ, sufficit ad eius motum oriturum, necesse est, ut æquale adeo quo
tempore aqua in Cylindricæ columnæ descendo de cubit duas
tertias partes diametri Globi, eadem ad motionem nem aquæ Glo-
bo aquæ s generandum. Nam Cylindricæ aquæ, latitudine Globi
& duabus tertis partibus a circumferentiâ descriptus, Globo æquatur,
Et propterea aquæ currenti circumferentiâ in Globum quiescentem,
quo tempore aqua currenti describit duas tertias partes diametri
Globi, & circumferentiâ contractus, generaret motum omnem par-
ti latitudinis Globi contrarius.

Quæ vero de aqua in canali demonstrata sunt, intellegenda
sunt etiam de aqua quacunque si lente, quæ Globum quiescentem in ea
quiescit. Quæque de aqua demonstrata sunt obtinent
etiam in fluido universis tubulosis. De his omnibus idem va-
let argumentum.

Jam vero per Lemma 1.º & 2.º, si Fluidum in Globum eadem
est, sive Globus quiescat & Fluidum in se ipsum cum velocitate mo-
veatur, sive Fluidum quiescat & Globus eadem cum velocitate
in partem contrariam moveatur. Et propterea resistentia Globi in
Medio quocunque Fluidi in se uniformiter progredientis, quo
tempore Globus duas tertias partes diametri suæ describit, æqua-
lis

lis est vi, quæ in corpus ejusdem magnitudinis cum Globo & ejusdem densitatis cum Medio uniformiter impressa, quo tempore Globus duas tertias partes diametri suæ progrediendo describit, velocitatem Globi in corpore illo generare posset. Tanta est resistentia Globi in superficiæ parte præcedente. *Q. E. D.*

Corol. 1. Si solidum Sphæricum in ejusdem secum densitatis Fluido subtilissimo libere moveatur, & inter movendum eadem vi urgeatur a tergo atque cum quiescit; ejusdem resistentia erit quam in Corollario secundo Propositionis xxxvi. descripsimus. Unde si computus ineatur, patebit quod solidum dimidium motus sui partem prius amittet, quam progrediendo descripserit longitudinem diametri propriæ, Quod si inter movendum minus urgeatur a tergo, magis retardabitur: & contra, si magis urgeatur, minus retardabitur.

Corol. 2. Hallucinantur igitur qui credunt resistentiam projectilem per infinitam divisionem partium Fluidi in infinitum diminui. Si Fluidum sit valde crassum, minuetur resistentia aliquantulum per divisionem partium eius. At postquam competentem fluiditatis gradum acquisiverit, (qualis forte est Fluiditas Aeris vel aquæ vel argenti vivi) resistentia in anteriore superficie solidi, per ulteriorem partium divisionem non multum minuetur. Nunquam enim minor futura est quam pro limite quem in Corollario superiore assignavimus.

Corol. 3. Media igitur in quibus corpora projectilia sine sensibili motus diminutione longissime progrediuntur, non solum Fluidissima sunt, sed etiam longe rariora quam sunt corpora illa quæ in ipsis moventur: nisi forte quis dixerit Medium omne Fluidissimum, impetu perpetuo in posteriorem projectileis partem facto, tantam promoveri motum ejus quantum impedit & resistit in parte antica. Et motus quidem illius, quem projectile imprimit in Medium, partem aliquam a Medio circulariter lato reddi corpori a tergo verissime est. Nam & experimentis quibusdam factis, reperi quod in Fluidis satis compressis pars aliqua redditur.

Quoniam

Omniem vero in casu quocunque reddi nec rationi consentaneum videtur, neque cum experimentis hæcenus a me tentatis bene quadrat. Fluidorum enim utcumque tubulum, si densa sint, vix ad solida movenda resistendaque per magnam esse, & quomodo vis illius quantitas per experimenta determinetur, plenius patebit per Propositiones duas quæ sequuntur.

Lemma IV.

Si vas Sphaericum Fluido Homogeneo quiescente plenum a vi impressa moveatur in directum, minque progressivo semper accelerato na pergat ut interea non moveatur in orbem: partes Fluidi inclusi, æqualiter participando motum vasis, quiescent inter se. Idem obtinebit in vase figuræ cujuscunque. Res manifesta est, nec indiget demonstratione.

Prop. XXXIX. Theor. XXX.

Fluidum omne quod motu accelerato ad modum venti increbescens progreditur, & cujus partes inter se quiescunt, rapit omnia ejusdem densitatis innata sua corpora, & secum cum eadem velocitate defert.

Nam per Lemma superius si vas Sphaericum, rigidum, & fluido-que homogeneo quiescente plenum, motu paulatim impreso progrediatur, Fluidi motum vasis participantis partis omnes semper qui sunt inter se. Ergo si Fluidi partes aliqua congelarentur, pergerent hæc quiescere inter partes reliquas. Nam quomodo in partes omnes quiescunt inter se, perinde cum siue fluidæ sint, siue aliquæ earum rigescant. Ergo si vas a vi aliqua extrinseca rapeda moveatur, & motum suum imprimat in Fluidum: Fluidum quoque motum suum imprimet in sui ipsius partes congelatas earque tecum rapiet. Sed partes illæ congelatæ sunt corpora solida ejusdem densitatis cum fluido, & par est ratio Fluidi, live id in vase moto claudatur, live in partibus liberis ad modum venti

U u

spiret.

Corol. 1. Ergo si ex aucta solidi sphaerici magnitudine augeatur eius resistentia ratione duplicata, resistentia solidi sphaerici dati ex data ratione magnitudinis particularum 1. 101, nullatenus minuetur.

Corol. 2. Si resistentia, iugando solidam sphaericam, augeatur in mensura quatuor duplicata ratione diametri, eadem diminuetur octavo particularum 1. 101, diminuetur in ratione, qua resistentia aucta debet a ratione duplicata diminui.

Corol. 3. Unde per praeteritum est, quod solidi dati resistentia per diametrum partem fluidi non multum diminui potest. Nam resistentia solidi aucta debet esse quam proxime ut quantitas materiae fluidae resistentis, quam totam illam movendo protrudit & a loco a se invicis & octo spatii propellit. hoc est et spatium cylindricum per quod solidum movetur, adeoque in duplicata ratione aequali aucta solidi quamproxime.

Corol. 4. Estur proportionis duobus Fluidis, quorum alterum in altero quoad vim resistendi non rursus superatur. Fluidum quod magis resistit est altero rariius, suntque 10 Fluidorum omnia in aere resistendi prope ut eorum densitates. praesertim si solida minima, & velociter moveantur, & Fluidorum equalis ut conperi-
tur.

Scholium Generale

Ubi haec nunc demonstrata sunt reavi in hunc modum. Globum 1. 101 pondere unctarum Romanarum 37. 1/2, diametro de latorem 1. 101, in aqua, filo tenui ab uno latere si non suspendi, ut ut later unctam & contrarium oscillaret. Globi nitant ariet pedam. Et do praeteritum reavi pedibus diametri & unctarum a centro suspendi. diametri & cetera praeteritis colloca. Residuum in diametro diametri, quod est epe notarem longitudine arcus a Pendulo descripti. Deinde numeravi oscillationes quibus Globus quatuordecim per-
tinet a vertice. & per idem deduxit a perpendiculari ad di-

stantiam duorum digitorum, & inde demittebatur; ita ut toto suo descensu describeret arcum duorum digitorum, totaque oscillatione prima, ex descensu & ascensu subsequente composita, arcum digitorum iere quatuor. Idem oscillationibus 164 annuit octavam motus sui partem, sic ut ultimo suo ascensu describeret arcum digiti unius cum tribus partibus quartis digiti. Si primo descensu descripsit arcum digitorum quatuor, annuit octavam motus partem oscillationibus 121, ita ut ascensu ultimo describeret arcum digitorum 31. Si primo descensu descripsit arcum digitorum octo, sedecim, triginta duorum vel sexaginta quatuor, annuit octavam motus partem oscillationibus 69, 137, 205, & respective. Igitur differentia inter arcus descensu primo & ascensu ultimo descriptos, erat in casu primo, secundo, tertio, quarto, quinto, sexto, digitorum 1, 1, 1, 2, 4, 8 respective. Dividuntur ex differentia per numerum oscillationum in casu unoquoque; & in oscillatione una mediocri, qua arcus digitorum 31 71, 15, 30, 60, 12 descriptus fuit, differentia arcuum descensu & subsequente ascensu descriptorum, erit $\frac{1}{212}$, $\frac{1}{106}$, $\frac{1}{53}$, $\frac{1}{26}$, $\frac{1}{13}$ partes digiti respective. Hæ autem in majoribus oscillationibus sunt in duplicata ratione arcuum descriptorum quam proxime, in minores vero paulo majores quam in ea ratione, & propterea (per Coro² 2 Prop³¹ Libri hujus) resistentia Globi ubi celerrime movetur, est in duplicata ratione velocitatis quamproxime, ubi tardius, paulo major quam in ea ratione: omnino ut in Corollariis Propositionis xxxii. demonstratum est.

Definiet iam V velocitatem maximam in oscillatione quavis, sineque A , B , C quantitates datae, & fingamus quod differentia arcuum sit $AP + BP + CP$. Et cum velocitates maximæ in predictis sex Casibus, sint ut arcuum dimidiorum 1, 31, 71, 155, 309, 618, atque ad idem arcus ipsi quamproxime, hoc est ut numeri 1, 2, 4, 8, 16, scribamus in Casu secundo quarto & sexto numeros 1, 4, & 16 pro V , & prodibit arcuum differentia $\frac{1}{212}$ æqualis $A + B + C$ in Casu secundo, & $\frac{2}{351}$ æqualis $4A + 8B + 16C$ in

in casu quarto, & $\frac{8}{91}$ æqualis $16A + 64B + 256C$ in casu sexto. Unde si per has æquationes determinemus quantitates A, B, C , habebimus Regulam inveniendi differentiam arcuum pro velocitate quacunque data.

Ceterum cum velocitates maxime sint in Cycloide ut arcus oscillando descripsi in circulo vero ut semidiametri eorum illorum chordæ, adeoque per istos arcibus majores sint in Cycloide quam in circulo, in ratione semidiametri arcuum adeo undem chordarum, tempora autem in circulo sunt majora quam in Cycloide in velocitatis ratione reciproca: ut ex resistentiæ in circulo invenitur resistentiæ in Trochoide, debet resistentiæ augeri in duplicata circiter ratione arcus ad chordam, ob velocitatem in ratione illa simplici auctam, & diminui in ratione chordæ ad arcum, ob tempus (seu durationem resistentiæ qua arcuum differentia prædicta generatur) diminutum in eadem ratione: id est (si rationes conjungamus) debet resistentiæ augeri in ratione arcus ad chordam circiter. Hæc ratio in casu secundo est 6283 ad 6279, in quarto 1256 ad 1253, in sexto 2512 ad 2489. Et inde resistentiæ

$\frac{1}{100000}$ $\frac{2}{31}$, & $\frac{8}{91}$ evadunt $\frac{6283}{6279 \times 442}$ & $\frac{2512}{1253 \times 35}$ & $\frac{201056}{1489 \times 9 \times 9}$ id est in numeris decimalibus 0,000001, 0,0548 & 0,8223. Unde procedunt æquationes $A + B + C = 0,000001$ $4A + 8B + 16C = 0,0548$ & $16A + 64B + 256C = 0,8223$. Et ex his per debitam terminorum collationem & reductionem Analyticam fit $A = 0,00000097$, $B = 0,000000955$ & $C = 0,0000000293$. Est igitur differentia arcuum ut $0,00000097 V^2 + 0,000000955 V^2 + 0,0000000293 V^2$ & propterea cum per Corol. Prop. xxx resistentiæ Globi in medio arcus oscillando descripsi, ubi velocitas est V , sit ad ipsius pondus ut $A V^2 + B V^2 + C V^2$ ad longitudinem Penduli, si pro A, B & C scribantur numeri inventi, fiet resistentiæ Globi ad eum pondus, ut $0,00000097 V^2 + 0,000000955 V^2 + 0,0000000293 V^2$ ad longitudinem Penduli inter centrum suspensionis & Regulam, id est ad 121 digitos. Unde cum V in casu

oscillationum quibus pars octava motus totius cessavit; secunda numerum oscillationum quibus eisdem pars quarta amissa fiat.

Descensus primus 1 2 4 8 16 32 64

Ascensus ultimus $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ 1 2 4 8 16

Numerus Oscillat. 226 228 193 140 9 53 30

Descensus primus 1 2 4 8 16 32 64

Ascensus ultimus $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ 1 2 4 8 16

Numerus Oscillat. 516 518 420 318 204 121 72

In Tabula priore seligendo ex observationibus tertiam, quintam & septimam, & exponendo velocitates maximas in his observationibus particularem per numeros 1, 4, 16 respective, & generaliter per quantitatem V ut supra. emergit in observatione prima $\frac{1}{192} = A + B + C$, in secunda $\frac{1}{96} = 4A + 8B + 16C$, in tertia $\frac{1}{60} = 16A + 64B + 256C$. Quae aequationes per reductas superius expositas dant, $A = 0,00145$, $B = 0,0027$ & $C = 0,0009$. Ex inde prodit resistentia Globi cum velocitate V moventis, in ea ratione ad pondus suum unciarum 261, quam habet $0,000924V + 0,0001214 + 0,000575V^2$ ad Pondus longitudinem 121 digitorum. Et si spectemus eam solummodo resistentiae partem qua est in duplicata ratione velocitatis, haec erit ad pondus Globi ut $0,00063V^2$ ad 121 digitos. Erat autem haec pars resistentiae in experimento primo ad pondus Globi ignei unciarum 571, ut $0,00027223V^2$ ad 121. & inde fit resistentia Globi ignei ad resistentiam Globi plumbei (paribus eorum velocitatibus) ut 571 in $0,00027223$ ad 261 in $0,00063$, id est ut 1333 ad 1219 seu 11 ad 1. Diametri Globorum duorum erant 6 & 3 digitorum, & harum quadrata sunt ad invicem ut 49. & 9, seu 12 ad 3 & 1 quatuor proxime. Ergo resistentiae

Globorum

Globorum æquielocum erant in minore ratione quam duplicata diametrorum. At nondum consideravimus resistantiam fili, quæ certe permagna erat, ac de pendulorum inventa resistantia subduci debet. Hanc accurate definire non potui, sed maiorem tamen inveni quam partem tertiam resistantiæ totius minoris penduli, & inde didici quod resistantiæ Globorum, dempta fili resistantia, sunt quamproxime in dimidrata ratione diametrorum. Nam ratio 7 ad 11, id est 7 ad 11, ad 1, non longe abest a diametrorum ratione duplicata 11 ad 1.

Cum resistantia fili in Globis maioribus minoris sit momenti, tentavi etiam experimentum in Globo cuius diameter erat 1¹/₂ digitorum. Longitudo penduli inter punctum suspensionis & centrum oscillationis erat digitorum 122, inter punctum suspensionis & nodum in filo 104, dig. Arcus primo penduli descensu a nodo descriptus, 32 dig. arcus ascensu ultimo post oscillationem quinque ab eodem nodo descriptus, 28 dig. Summa arcuum seu arcus totus oscillatione mediocri descriptus, 30 dig. Differentia arcuum 4 dig. Eius pars decima seu differentia inter descensum & ascensum in oscillatione mediocri 3 dig. Ut radius 1 ad radium 122, ita arcus totus 60 dig. oscillatione mediocri a Nodo descriptus, ad arcum totum 63, oscillatione mediocri a centro Globi descriptum: & ita differentia 3 ad differentiam novam 0,4475. Si longitudo penduli, manente longitudine arcus descripti, augetur in ratione 126 ad 122, velocitas eius diminueretur in ratione illa dimidrata, & arcuum descensu & subsequente ascensu descriptorum differentia 0,475 diminueretur in ratione velocitatis, adeoque evaderet 0,2217. Deinde si arcus descriptus augetur in ratione 63 ad 60, differentia ista 0,4475 augetur in duplicata illa ratione, adeoque evaderet 1,54. Hæc ita haberent, ex hypothæsi quod resistantia Penduli esset in duplicata ratione velocitatis. Ergo si pendulum describeret arcum totum 124 digitorum, & longitudo eius inter punctum suspensionis & centrum oscillationis esset 12 digitorum, differentia arcuum

um descensu & subsequente ascensu descriptorum foret 1, 509 dig. Et hæc differentia ducta in pondus Globi penduli, quod erat unciarum 208, producit 213, 6. Rursum ubi pendulum superius ex Globo ligneo constructum, centro oscillationis, quod a puncto suspensionis distans 120 distabat, describebat arcum totum 124¹ digitorum, differentia arcuum descensu & ascensu descriptorum fuit $1\frac{1}{2}$ in $\frac{8}{9}$ seu 1, quæ ducta in pondus Globi quod erat unciarum 57, 1, producit 48, 55. Duxi autem differentias hæc in pondera Globorum ut invenirem eorum resistencias. Nam differentie oriuntur ex resistenciis, suntque ut resistencie directe & pondera inverse. Sunt igitur resistencie ut numeri 313,9 & 48,55. Pars autem resistencia Globi minoris, quæ est in duplicata ratione velocitatis, erat ad resistenciam totam ut 0,5817, ad 0,6533, id est ut 44,4 ad 48,55, & pars resistencie Globi minoris propemodum æquatur ipsius resistencie toti, adeoque partes illæ sunt ut 313,9 & 44,4 quamproxime, id est ut 7,7 ad 1. Sunt autem Globorum diametri 1, & 2, & hanc quadrata 314 & 47 sunt ut 7,55 & 1 id est ut Globorum resistencias 7,0 & 1 quamproxime. Differentia ratiociniis aut major est quam quæ ex ratione minoris potest. Igitur resistencias non partes illæ quæ sunt, pars (Globi) ut quadrata velocitatum, scilicet pars (velocitatis) ut quadrata diameterum Globorum, & propterea per Globorum Prop. XL Lib. I hanc resistenciam quæ est globi minoris & velociores in aere movendo sunt, laud magis in peritiam aeris divisionem & subtilisationem diminui potest, proindeque Media omnia in quibus corpus multo minus resistitur, sunt aere ratiore.

Cæterum Globorum, quibus usus sum in his experimentis, maximus non erat perfecte Sphæricus, & propterea in calculo allato minutias quasdam brevitas, etiam neglecti, de calculo accurato in experimento non satis accurately minime sollicitus. Operam itaque (cum demonstratio vacui ex hoc deperdat) ut experimenta

placi) diminueretur in eadem illa ratione 44 ad 41, adeoque evaderet 1^2 in $\frac{1}{4}$, seu $\frac{1}{4}$. Paribus igitur Pendulorum velocitatibus motus æquales in aere oscillationibus 535 & in aqua oscillationibus $\frac{1}{4}$ amissi sunt; adeoque resistentia penduli in aqua est ad eius resistentiam in aere ut 535 ad $\frac{1}{4}$. Hæc est proportio resistentiarum totarum in Casu columnæ quartæ.

Designet jam $AV + CV'$ resistentiam Globi in aere cum velocitate V moventis, & cum velocitas maxima, in Casu columnæ quartæ, sit ad velocitatem maximam in casu columnæ primæ ut 1 ad 8, & resistentia in Casu columnæ quartæ ad resistentiam in Casu columnæ primæ in ratione arcuum differentiarum in his casibus, ad numeros oscillationum applicatæ, id est ut $\frac{1}{4}$ ad $\frac{16}{85}$, seu ut 85: ad 4280: scribamus in his Casibus 1 & 8 pro velocitatibus, atque 85, & 4280 pro resistentiis, & fiet $A + C = 85$; & 8 $A + 046 = 4280$ seu $A + C = 535$, indeque per reductionem æquationum proveniet $7C = 449$, & $C = 64\frac{1}{8}$, & $A = 21$, atque adeo resistentia ut $21 V + 64\frac{1}{8} V'$ quamproxime. Quare in Casu columnæ quartæ ubi velocitas erat 1, resistentia tota est ad partem suam quadrato velocitatis proportionalem, ut $21 + 64\frac{1}{8}$, seu $85\frac{1}{8}$, ad $64\frac{1}{8}$, & idcirco resistentia penduli in aqua est ad resistentiæ partem illam in aere quæ quadrato velocitatis proportionalis est, quæque sola in motibus velocioribus consideranda venit, ut 85, ad 64, & 535 ad 64 — combinatum, id est ut 64 ad 1. Si penduli in aqua oscillantis filum totum fuisset immersum, resistentia eius fuisset adhuc major, adeo ut penduli in aere oscillantis resistentia illa quæ velocitatis quadrato proportionalis est, quæque sola in corporibus velocioribus consideranda venit, sit ad resistentiam eandem penduli totius, eadem cum velocitate in aqua oscillantis, ut 64 vel 60 ad 1 circiter, hoc est ut densitas aquæ ad densitatem aeris quamproxime.

In hoc calculo sumi quoque deberet pars illa resistentiæ penduli in aqua, quæ erat ut quadratum velocitatis, sed (quod mirum

rum forte videatur) resistentia in aqua augebatur in ratione velocitatis plusquam duplicata. Eius rei causam investigando, in hanc incidit, quod Arca nimis angusta esset pro magnitudine Globi penduli, & motum aquæ cedentis præ angustia sua nimis impediabat. Nam si Globus pendulus, cujus diameter erat dupli-
 catus unius, immergeretur, resistentia augebatur in duplicata ratione velocitatis quamproxime. Id tentabam construendo pendulum ex Globis duobus, quorum interior & minor oscillaretur in aqua, superior & major proxime supra aquam filo affixus esset, & in Aere oscillando, adjuvaret motum penduli cumque disturbatorem reddere et. Experimenta autem hoc modo instituta se habebant ut in Tabula sequente describitur.

<i>Arcus descensio primo descriptus</i>	16	8	4	2	1	1	1
<i>Arcus ascensio ultimo descriptus.</i>	12	6	3	1½	¾	¾	¾
<i>Arcuum diff. motui unius proportionalis</i>	4	2	1	½	¼	¼	¼
<i>Numeri diff. rationum</i>	3½	6½	12½	21½	34	53	62½

Resistentia hæc nunquam augetur in ratione velocitatis plusquam duplicata. Et idem in pendulo maiore evenire verisimile est, si modo Arca augeatur in ratione penduli. Debet tamen resistentia tam in aere quam in aqua, si velocitas per gradus infinitum augeatur, augeri tandem in ratione paulo plusquam duplicata, propterea quod in experimentis hæc descriptis resistentia minor est quam pro ratione de corporibus velocissimis in Libri huius Prop. xxxvi & xxxvii. demonstrata. Nam corpora longe velocius in spatium a tergo relinquent vacuum, ideoque resistentia quam sentiunt in partibus præcedentibus, nullatenus minuetur per pressionem Medii in partibus posticis.

Conferendo resistentias Mediorum inter se, effecti etiam ut pendula ferrea oscillarentur in argento vivo. Longitudo fili ferrei erat pedum quasi trium, & diameter Globi penduli quasi tertia
 pars

paradigmi. Ad filum autem proxime supra Mercurium affixus erat Globus alii plumbaeas lateris magnus ad motum per diti de-
 terminandum. Tum vasculum, quod capiebat quatuordecim
 tres argenti vivi implebatur vobis alteri argento vivo & aqua
 communi, ut pendulo in fluido utraque succederet obstante in-
 ventam proportionem resistentiarum. & prodiret resistetia ar-
 genti vivi ad resistentiam aquae ut 1, vel 14 ad 1 circiter. Ad si-
 ne dentitas argenti vivi ad dentitatem aquae. Ubi Globum pen-
 dulum paulo maiore nallu velum puta cuius diametri later quod
 vel 4 partes diametri, prodiret resistentia argenti vivi in ea ratio-
 ne ad resistentiam aquae quae habet nunc 14 ad 1 vel 14 ad 1 circi-
 ter. Sed experimento perierunt istos duos, propterea quod
 in his ultimis vasculis argenti vivi pro maiori educte Globi
 immeriti. Ampliato Globi, deberet etiam vasculum. Constru-
 erant quidam huiusmodi experimentum in valis nationibus & in
 liquoribus tum Metallorum suis, tum aliis quibusdam tam ca-
 lidis quam frigidis repetere. sed omnia experiri non vacat, &
 ex iam decepti sunt. per se si enim in corporum celestium mo-
 tum dicitur. Huiusmodi in quibus movetur prope aequalem
 est & in proxime. Nemo igitur accurate. Nam Fluida renaciora
 partem duntaxat proximum motum resistentiam quam liquidiora, ut
 oleum frigidum quam calidum, calidum quam aqua pluvialis, a-
 quo quam Spiritus vini. Verum in liquoribus qui ad sententiam sa-
 tisfacti sunt, ut in Aere, in aqua sententia sententia, in Spiritu-
 bus vini, Terribilibus & Sulphure, in Oleis a terribilibus per distilla-
 tionem liberato & calidioribus, Oleis vitruoli & Mercurio, ac
 Metallo liquidioribus, & quae sunt alia, cum tam Fluida sunt ut in
 vasa agitati motum capere non duntaxat conveniant, effluuntque li-
 berrime in gentia decurrendo se obstant, nullum dubito quod re-
 gula allata satis accurate observari poterit, si experimentum in
 corporibus pendulis & maioribus & velocius motum fuerint.

Quare cum Globus aqueus in aere movendo resistentiam pa-
 atur qua motus sui par est, interea dum longitudinem scindit
 ametri

ametri suae describat (ut iam ante usensum est) tollatur, sitque densitas aeris ad densitatem aquae ut 60 vel 80 ad 1 circiter, con-
 sequens est ut hac Regula generaliter obineat. Si corpus quod ibet Sphaericum in Medio quocunque sibi Medio moveatur, & spectetur resisten-
 tia passiva tota quae est in duplicata ratione velocitatis. hac pars erit ad viam rectam totum corporis motum, interea dum corpus idem longitudo in duarum ipsius terminame-
 ntorum motu illo uniformiter continuato describat, vel tollere posset vel eundem generaret, ut densitas Medii ad densitatem corporis quamproxime. Igitur resistentia quasi triplo maior est quam pro lege in Corollario priore Propositionis xxxviii. allata. & propterea partes quasi duae tertiae motus rationis quam Globi partes antea movebatur equantur in Medium, tractantur in Globi partes postquam Medium in orbem redierit, inquit ipsam inveniunt quod Globus abstraxerat post se relinqueret. Unde si velocitas Globi quae per aequantur Medii non posset ad o-
 celum iterum ipsam illam ducere, quae ab ipso velocius a tero Globi semper relinqueretur, & tunc eadem esset quam triplo maior quam pro Regula generali novissime posita.

Hactenus spermetur et collatas motus etiam per dulcorum, eo quod eo non motus facilis & accuratus observari & men-
 surari possit. Notandum per dulcorum in quatuor aequantur & in orbem & duodecim circulo describentium, propterea quod sunt minores & eo non ita ad quod eandem resistentiam dare velo-
 citati competens ut hanc apponere videatur, in consilium etiam adhiberi. Et circulo etiam per dulcorum & circulo per latum duode-
 cim revolvetur, notavi namque medietatem horum duorum, quod prima & ultima revolvuntur decipit. Et inde collecti velocitates corporis sub ratione & mae. Tum dicendo quod corpus, veloci-
 tate maiori describendo circulo duodecim mediocriter, amitteret velocitatum illarum differentiam, collegi resistentiam qua differ-
 rentia illa eo omni corporis per circulos duodecim itinere amitti posset; & resistentia inventa, quanquam huius generis experi-
 menta

menta minus accurate tentare licuit, probe tamen cum precedentibus congruebat.

Denique cum receptissima Philosophorum ætatis huius opinio sit, Medium quoddam æthereum & longe subtilissimum extare, quod omnes omnium corporum poros & meatus liberè inire permittet, a tali autem Medio per corporum poros fluere te resistenteria oriri debeat: ut tentarem an resistentia, quæ in motis corporibus experitur, tota sit in eorum externa superficie, an vero partes etiam internæ in superficiibus propriis resistentiam notabilem sentiant, excogitavi experimentum tale. Fido pedum unius cum longitudinis, ab amico chalybeo tatis fimo, machinæ amico chalybeo, suspendebam pyxidem abiectionem rotundam, ad constituendum pendulum longitudinis prædictæ. Unius latitudinis prædictæ erat acie concava, ut annulus acui suo superior acies naves liberrime moveretur. Acui autem isti non annulus datur filum. Pendulum ita constitutum distendebam a perpendiculari ad distantiam quasi pedum sex, atque secundum plumbum acui meo perpendicularare, ne annulus, cui pendulum, ita præ aciem unius ultro citroque laberetur. Nam plumbum in pendulo in quo annulus unicum tangit, immotum manere debet. Locum igitur accurate notabam, ad quem deduxeram pendulum, deinde pendulo demisso notabam alia tria loca ad quæ redibat in fine oscillationis primæ, secundæ ac tertiæ. Hoc repetebam sæpius, ut loca illa quam potui accuratissime inveniarem. Tum pyxidem plumbæ & prædictis, quæ ad manus erat, in talibus suspendebam. Sed prius ponderabam pyxidem vacuum, una cum parte fili quæ circum pyxidemolvebatur ac dimidio patet, id quæ quæ inter unum & pyxidem pendulam tendebatur. (Nam filum totum dimidio ponderis sui pendulum a perpendiculari directum temperaret.) Hic pondus addebam pondus aeris quam pyxis capiebat. Hoc pondus totum erat quasi paupertatæ octava pyxidismetallicum plumbum. Tum quoniam pyxis Metallorum plera, pondere suo tendendo filum, auget longitudo penduli, contraherebam

bam filum ut penduli jam oscillantis eadem esset longitudo ac prius. Dem pendulo ad locum primo notatum distracto ac dimisso, numerabam oscillationes quasi septuaginta & septem, donec pyxis ad locum secundo notatum rediret, tot demque suavit de donec pyxis ad locum tertio notatum rediret, atque rursus eodem donec pyxis reditu suo attingeret locum quartum. Unde concludo quod resistentia tota pyxidis plenae non maiorem habebat proportionem ad resistentiam pyxidis vacuae quam 78 ad 77. Nam si aequales essent ambarum resistentiae, pyxis plena ob vim suam inertiam septuaginta & octies maiorem vi inertia pyxidis vacuae, motum suum oscillatorium tanto diutius conservare deberet, atque adeo completis temper oscillationibus 78 ad loca illa notata redire. Rediit autem ad eadem completis oscillationibus 77.

Desinet igitur *A* resistentiam pyxidis in ipsius superficie externa, & *B* resistentiam pyxidis vacuae in partibus internis, & si resistentia corporum aequalium in partibus internis sint ut materia, scilicet numerus particularum quae resistuntur: erit 78 *B* resistentia pyxidis plenae in ipsius partibus internis: adeoque pyxidis vacuae resistentia tota *A* + *B* erit ad pyxidis plenae resistentiam totam *A* + 78 *B* ut 77 ad 78, & dividam *A* + *B* ad 77 *B* ut 77, ad 1, inde ut *A* + *B* ad *B* ut 77 x 77 ad 1, & dividam *A* ad *B* ut 52.8 ad 1. Est igitur resistentia pyxidis vacuae in partibus internis quae quiescens minor quam eadem resistentia in externa superficie, & amplius. Sic disputamus ex hypothese quod maior illa resistentia pyxidis plenae oritur ab actione fluidi alicuius subtilis in Metallum inclinati. At eam longe aliam esse opinor. Nam tempora oscillationum pyxidis plenae non sunt quam tempora oscillationum pyxidis vacuae, & propterea resistentia pyxidis plenae in externa superficie maior est pro ipsius velocitate & longitudine spatii oscillando descripti, quam ea pyxidis vacuae. Quod cum ita sit, resistentia pyxidum in partibus internis aut nulla erit aut plane inenarrabilis.

Hoc experimentum recitavi memoriter. Nam charta, in qua illud aliquando descripseram, intercidit. Unde fractas quasdam numerorum partes, quæ memoria exciderunt, omittere compulsum sum. Nam omnia denuo tentare non vacat. Prima vice, cum unco infirmo usus essem, pyxis plena citius retardabatur. Cautam querendo, reperi quod uncus infirmus cedebat ponderi pyxidis, & eius oscillationibus obliquendo in partes omnes flectebatur. Parabam igitur uncum firmum, ut punctum suspensionis immotum maneret, & tunc omnia ita evenerunt uti supra descripsimus.

Eadem methodo qua invenimus resistantiam corporum Sphaericorum in Aqua & argento vivo, inveniri potest resistantia corporum figurarum aliarum, & sic Navium figuræ varæ in Typis exquis constructæ inter se confertæ, ut quænam ad navigandum aptilimæ sint, tampræbus parvis tentetur.

S E C T. VIII

De Motu per Fluida propagato.

Prop. XLI. Theor. XXXI

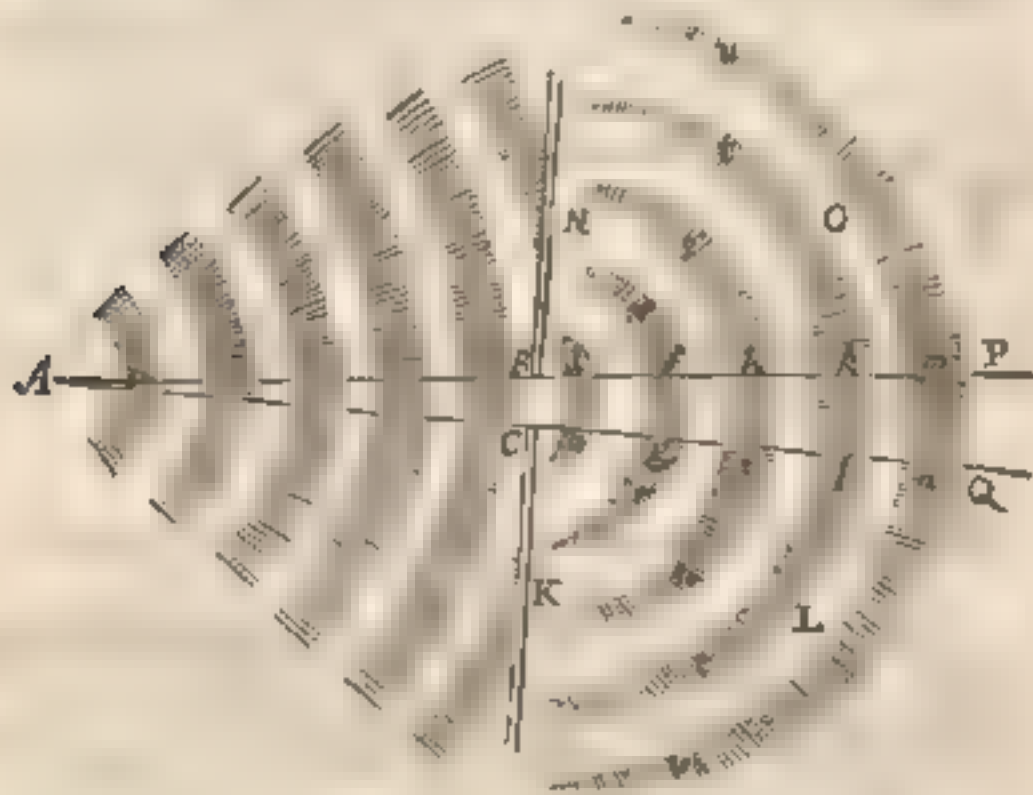
Pressio non propagatur per Fluidum secundum lineas rectas, nisi ubi particule Fluidi in directum jacent.

Si jaceant particule *a, b, c, d, e* in linea recta, potest quidem primo directe propagari ab *a* ad *e*, at particula *e* urgebit particulas oblique positas *f* & *g* oblique, & particula illæ *f* & *g* non sustinebunt pressionem aliam, nisi taliamur a particulis ulterionibus *b* & *k*, quatenus a rem salutarur, premunt particulas salientes, & hæ non sustinebunt pressionem nisi taliantur



car ab ulterioribus *l* & *m* easque premant, & sic deinceps in infinitum. Pressio igitur, quam primum propagatur ad particulas quæ non in directam jacent, divaricare incipiet & oblique propagabitur in infinitum; & postquam incipit oblique propagari, si incidit in particulas ultiores, quæ non in directam jacent, iterum divaricabit, idque toties, quoties in particulas non accurate in directam jacentes incidit. *Q. E. D.*

Corol. Si pressio a dato puncto per fluidum propagata pars aliqua obstaculo intercipiatur, pars reliqua quæ non intercipitur divaricabit in spatia pone obstaculum. Id quod sic etiam



demonstrari potest. A puncto *A* propagetur pressio quaque-
versum, idque si fieri potest secundum lineas rectas, & obstacu-
lo *N B C K* perforato in *B C*, intercipiatur ea omnis, præter par-
tem Conformem *A P Q*, quæ per foramen circulare *b C* transi-
t. Planis transversis *d e*, *f g*, *h i* distinguatur conus *A P Q* inusta

& interea dum conus ABC , pressionem propagando, urget frustum conicum ulterius $de g f$ in superficie de , & hoc frustum urget frustum proximum $f g i b$ in superficie $f g$, & frustum illud urget frustum tertium, & sic deinceps in infinitum, manifestum est (per motus Legem tertiam) quod frustum primum $de f g$, reactione frustu secundi $f g b i$, tantum urgebitur & premietur in superficie $f g$, quantum urget & premiet frustum illud secundum. Frustum igitur $de g f$ inter Conum Ade & frustum $f b i g$ comprimitur utrinque, & propterea (per Corol. 6. Prop. XIX) figuram suam servare nequit, nisi vi eadem comprimatur undique. Eodem igitur impetu quo premitur in superficieribus de , fg conabitur eisdere ad latera df , eg , ibique (cum rigidum non sit, sed omnimodo Fluidum) excurret ac dilatabitur, nisi Fluidum ambiens adit, quo conatus iste cohibeatur. Proinde conatu excurrendi premet tam Fluidum ambiens ad latera df , eg quam frustum $f g b i$ eodem impetu, & propterea pressio non minus propagabitur a lateribus df , eg in spatio NO , KL hinc inde, quam propagatur a superficie fg versus PQ . *Q. E. D.*

Prop. XLII. Theor. XXXII.

Motus omnis per Fluidum propagatus ducit a recto tramite in spatia immota.

Cis 1. Propagetur motus a puncto A per foramen BC , pergitque (si fieri potest) in spatio conico $BCQP$, secundum lineas rectas divergentes a puncto A . Et posuimus primo, quod motus iste sit undarum in superficie stagnantis aquae. Sitque de , fg , hi , kl , &c. undarum singularum partes altissima, vallibus totid in intermediis ab invicem distincte. Igitur quoniam aqua in undarum parte altior est quam in Fluidi partibus minoribus LK , NO , defluet ead. in de minorum terminis e , g , i , l , &c. d , f , h , k , &c. in ead. recta versus KL & NO : & quoniam in undarum vallibus de rectior est quam in Fluidi partibus minoribus LK , NO , defluet eadem

occupet superficiem circa centrum A descriptam, & inter pulsus
successivos aequalia intercedant intervala. Designent autem lineae
 $de, fg, hi, kl, &c.$ denotatas pulsuum partes per foramen bc
propagatas. Et quoniam Medium ibi densius est quam in spatio
hinc inde versus h, l & NO , dilatabit sese tam versus spatia illa
 h, l, NO utrinque sita, quam versus pulsuum rariora intervala,
eoque pacto rarius semper evadens e regione intervallosum ac den-
sissime regione pulsuum, participavit eorundem motum. Et quoniam
pulsuum progressivus motus oritur a perpetua relaxatione parti-
um densiorum versus antecedentia intervalla rariora, & pulsi
eadem celeritate sicut in Medio partes quiescentes h, l, NO hinc
inde relaxare debent, pulsus illi eadem celeritate sese dilatabunt
undique in spatio immota h, l, NO , qua propagantur directe a
centro A , adeoque spatium totum h, l, O, N occupabunt. $Q. E. D.$
Hoc experitur in tona, quae vel domo interposita adiungitur, vel
in cubiculam per fenestram admittit sese in omnes cubiculi partes
dilatant, inque angulis omnibus adiungitur, non reflexi a parietibus
oppositis sed a fenestra directe propagati.

Cor. 3. Tonamus denique quod ad notas causantur e generis
propagetur ab A per foramen bc & quoniam propagatio ista
non sit nisi quatuor partes Medio centro A propiores uterent
comanoveneque partes ulteriores, & partes quae uti centur illud
sunt, ideoque recedunt quae, tamen uti recedunt ab illius pre-
miatur recedent eadem versus Medio partes omnes quiescentes,
translaterales h, l & NO , quam anteriores P, Q , eoque pacto mo-
tus omni, quam primum per foramen bc transit, dilatari in-
cipiet, & abinde tamquam a principio & centro in partes omnes
directe propagari. $Q. E. D.$

Prop. XLIII. Theor. XXXIII.

Cor. 1. Si unum transversum in Medio Elastico propagabit motum pulsu-
um, restatque in ducendum in Medio eorum non Elastico motum circulem
est.

Cas. 1. Nam partes corporis tremuli vicibus alternis eundo & redeundo, ita suo urgebunt & propellent partes Medii sibi proximas, & urgendo comprimant easdem & condensabunt, dein reditu suo sinent partes compressas recedere & ite expandere. Igitur partes Medii corpori tremulo proxime ibunt & redibunt per vices, ad instar partium corporis illius tremuli & qua ratione partes corporis huius agitabant hasce Medii partes, hæc similibus tremoribus agitatae agitant partes sibi proximas, exque similiter agitatae agitant ultiores, & sic deinceps in infinitum. Et quemadmodum Medii partes primæ eundo condensantur & redeundo relaxantur, sic partes reliquæ quoties eunt condensantur, & quoties redeunt ite expandent. Ex propterea non omnes ibunt & simul rediunt (sic enim determinatas ab invicem distantias servando non rarefierent & condensarentur per vices) sed accedendo ad invicem ubi condensantur, & recedendo ubi rarefiunt, aliquæ earum ibunt dum aliæ redeant, idque vicibus alternis in infinitum. Partes autem eunt & eundo condensatae, ob motum suum prozeissivum quo ferunt obstacula, tant pulsus, & propterea pulsus & cessiva corpore omni tremulo in directum propagabuntur, idque aequalibus cunctis ab invicem distantis, ob æqualia temporis intervalla, quibus corpus tremoribus suis singulis pulsus excitat. Q. E. D. Et quanquam corporis tremuli partes eant & redeant secundum placam aliquam certam & determinatam, tamen pulsus inde per Medium propagati se dilatarent ad latera, per Propositionem præcedentem, & a corpore illo tremulo tanquam centro emanant, secundum superficies propemodum sphaericas & concentricas, undique propagabuntur. Cum res exemplum aliquod habemus in Uteris, juxta digitum tremulo excitentur, non solum pergent hinc inde secundum plagam motus digiti sed, in modum circulorum concentricorum, distans utramque erigent & undique propagabuntur. Nam gravitas undarum replet locum vis Flatus.

Quod si Medium non sit Elastica, quoniam eius partes a corpore

partes tremuli partibus vibratis pressæ condensari nequeunt, propagatur motus in instanti ad partes ubi Medium facillime cedit, hoc est ad partes quas corpus tremulum aliquo vacuas a tergo relinqueret. Idem est casus cum casu corporis in Medio quocunque profecti. Medium cedendo proscissilibus, non recedit in infinitum, sed in circulum cundo pergit ad spacia quæ corpus relinquit a tergo. Igitur quoties corpus tremulum pergit in partem quancunque, Medium cedendo perget per circulum ad partes quæ corpus relinquit, & quoties corpus regreditur ad locum priorem, Medium inde repelletur & ad locum suum priorem rediit. Et quamvis corpus tremulum non ut firmum, sed modis omnibus flexile, si tamen magnitudine datum maneat, quoniam tremoribus suis nequit Medium ubivis urgere, quin alibi eidem simul cedat, efficiet ut Medium, recedendo a partibus ubi premitur, pergat semper in Orbem ad partes quæ eidem cedunt.

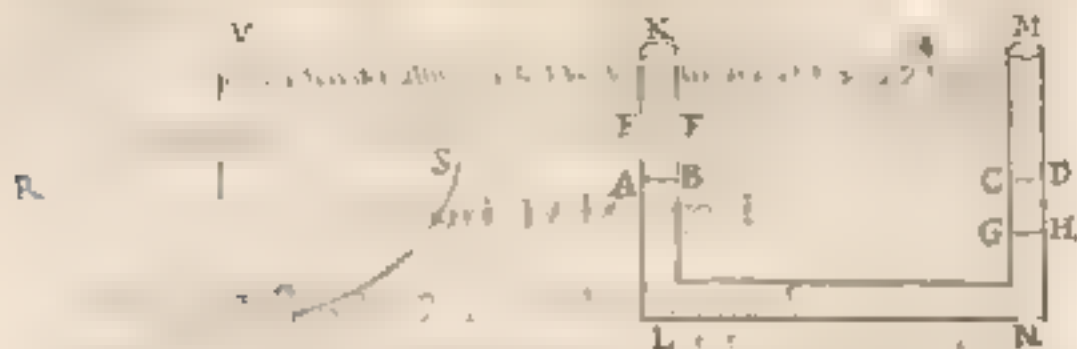
Carol. Hallucinetur non ita qui credunt agitationem partium flammæ ad pressionem per Medium ambire secundum lineas rectas propagandam conducere. Debet enim motus pressio non ab agitatione sola partium flammæ sed a totius distentione derivari.

Prop. XLIV. Theor. XXXIV.

Si Aqua in canali crucibus crectis KL, MN videlicet alterius ascendat & descendat, construaturs autem Pendulum cujus longitudo inter punctum suspensionis & certum oscillationis æquetur semissi longitudinis aque in Canale dico quod aqua ascendet & descendet iisdem temporibus quibus pendulum oscillatur

Longitudinem aque mensuro secundum axes canalis & crucum, eandem flammæ horum axium æquando. Designent igitur AB, CD mediocrem altitudinem aque in cruce utroque, & ubi a puncto in cruce A L ascendit ad altitudinem E F, descenderit aqua in cruce MN ad altitudinem G H. Sit autem P corpus pendulum,

pendulum, VP filum, V punctum suspensionis, $SPQR$ Cyclo-
is quam Pendulum describat, P ejus punctum infimum, PQ ar-
cus altitudinis AE æqualis. Vis, qua motus aquæ alternis vicibus



acceleratur & retardatur, est excessus ponderis aquæ in alterutro
crure si præ pondus in altero, ideoque ubi aqua in crure KL af-
cendit a LE , & in crure altero descendit ad GH , vis illa est pon-
deris duplicatum aquæ $EABF$, & propterea est ad pondus aquæ
totius ut AE scilicet PQ ad VP seu PR . Vis etiam, qua pondus P
in loco quodvis Q acceleratur & retardatur in Cycloide, est ad ejus
pondus totum, ut ejus distantia PQ a loco infimo P , ad Cycloi-
dis longitudinem PR . Quare aquæ & penduli, æqualia spatia
 AE , PQ describentium, vires motrices sunt ut pondera moven-
da. Ideoque vires illæ, si aqua & pendulum in principio, æquali
cum velocitate moveantur, pergent eadem temporibus æquali-
ter movere, cessant tunc ut motu reciproco simul eant & redeant.
Q. E. D.

Corol. 1. Itaque aquæ ascendens & descendens, siue motus
interior sit siue exterior, vires omnes sunt Isochronæ.

Corol. 2. Si longitudo aquæ totius in canali sit pedum *Parisien-
si*um $6\frac{1}{2}$, aqua tempore minuti unius secundi descendet, &
tempore minuti alterius secundi ascendet, & sic deinceps vic-
ibus alternis in infinitum. Nam pendulum pedum $3\frac{1}{2}$ longitu-
dine, tempore minuti unius secundi oscillatur.

Corol 3. Aucta autem vel diminuta longitudine aquæ, auge-
tur vel diminuitur tempus reciprocationis in longitudinis ratione
dimidiata.

Prop. XLV. Theor. XXXV.

Undarum velocitas est in dimidiata ratione latitudinum.
Consequitur ex constructione Propositionis sequentis.

Prop. XLVI. Prob. XI.

Invenire velocitatem Undarum.

Constituatur Pendulum cujus longitudo inter punctum suspen-
sionis & centrum oscillationis æquetur latitudin Undarum & quo
tempore pendulum illud oscillationes singulas peragit, eodem Un-
da progrediendo latitudinem suam propemodum conficiet.

Undarum latitudinem voco mensuram transversam quæ vel val-
libus unis vel summis culminibus interjacet. Desinet $ABCD$. F
super, si item aqua stagnanti, undis successivis ascendente ac des-
cendente, sintque A, C, E , &c. undarum culmina, & B, D, F , &c.
valles intermediæ. Et quoniam motus undarum sit per aquæ suc-
cessivum ascensum & descensum, sic ut ejus partes A, C, E , &c.
quæ nunc infimæ sunt, mox fiant altissimæ, & vis motrix, qua
partes altissimæ descendat & infimæ ascendant, est pondus
aquæ elevatae. alternas ille ascensus & descensus analogus erit
motui reciproco aquæ in canali, eademque temporis leges ob-
servabit: & propterea (per Prop. XIV) si distantia inter un-
darum loca altissima A, C, E , & infima B, D, F æquetur duplæ
penduli longitudini, partes alternæ a A, C, E tempore oscillatio-
nis unius evadent infimæ, & tempore oscillationis alterius de-
suo ascendent. Iterum inter transiitum Undarum singulatum
tempus erit oscillationum duarum, hoc est Unda describet
latitudinem suam, quo tempore pendulum illud bis oscillatur,
sed eodem tempore pendulum, cujus longitudo quadrupla est,
adeoque

adeoque æquat undarum latitudinem, oscillabitur semel. Q E D.

Corol. 1. Igitur Undæ, quæ pedes *Parmenses* 2^æ. latæ sunt, tempore minuti unius secundæ progrediendo latitudinem suam conficiunt, adeoque tempore minuti unius primi percurrent pedes 153, & horæ spatio pedes 11000 quam proximè.

Corol. 2. Et undarum majorum vel minorum velocitas augebitur vel diminetur in dimidiata ratione latitudinis

Hæc ita se habent ex Hypothesi quod partes aquæ recta ascendant vel recta descendunt, sed acrius & detentius ille verus sit per circulum, adeoque tempus hac Propositione non minus quam proxime datum esse affirmo.

Prop. XLVII. Theor. XXXVI.

Pulsuum in Fluido Elastico propagatorum velocitates sunt in ratione composita ex dimidiata ratione vis Elasticæ directæ & dimidiata ratione densitatis inversæ, si modo Fluidi vis Elastica ejusdem condensationis proportionalis esse supponatur.

Cas. 1. Si Media sint homogenea, & pulsuum distantia in hi Media æquantur inter se, sed motus in uno Medio intensior sit. contractiones & dilatationes partium analogarum erunt ut eadem mora. Accurata quidem non est hæc proportio. Verum tamen nisi contractiones & dilatationes sint valde intense, non errabit sensibilibiter, adeoque pro Physice accurata haberi potest. Sunt autem vires Elasticæ motrices ut contractiones & dilatationes, & velocitates partium æqualium simul genitæ sunt ut vires. Ideoque æquales & correspondentes pulsuum correspondentium partes, nus & reditus suos per spatia contractionibus & dilatationibus proportionalia, cum velocitatibus quæ sunt ut spatia, simul peragent. & propterea pulsus, qui tempore nus & reditus unius latitudinem suam progrediendo conficiunt, & in loca pulsuum proximè precedentium tempore succedunt, ob æqualitatem distantiarum, æquali etiam velocitate in Medio utrique progredientur.

Cas. 2. Si pulsum distantie seu longitudines sint majores in uno Medio quam in altero, ponamus quod partes correspondentes spatia latitudinibus pulsum proportionalia singulis vicibus eundo & redeundo describant: & æquales erunt earum contractiones & dilatationes. Ideoque si Media sint homogenea, æquales erunt etiam vires illæ Elasticæ motrices quibus reciproco motu agitantur. Materia autem his viribus movenda, est ut pulsum latitudo, & in eadem ratione est spatium per quod singulis vicibus eundo & redeundo moveri debent. Estque tempus itus & reditus unus in ratione composita ex ratione dimidiata materiae & ratione dimidiata spatii, atque adeo ut spatium. Pulsus autem temporibus itus & reditus unus eundo latitudines suas contingunt, hoc est, spatia temporibus proportionalia percurrunt, & propterea sunt æquveloces.

Cas. 3. In Medis igitur densitate & vi elastica paribus, pulsus omnes sunt æquveloces. Quod si Medii vel densitas vel vis Elastica intendatur, quoniam vis motrix in ratione vis Elasticæ, & materia movenda in ratione densitatis augetur, tempus quo motum idem peraguntur ac prius, augebitur in dimidiata ratione densitatis, ac diminuetur in dimidiata ratione vis Elasticæ. Et propterea velocitas pulsum erit in ratione composita ex ratione dimidiata densitatis Medii inverse & ratione dimidiata vis Elasticæ directe. Q. E. D.

Prop. XLVIII. Theor. XXXVII

Pulsibus per Fluidum propagatis, singulæ Fluidi particula, motu reciproco hinc illuc & redempte, arretrantur semper & revertuntur pro lege oscillantis penduli.

Designent *AB, BC, CD, &c.* pulsum successivorum æquales distantias; *ABC* plagam motus pulsum ab *A* versus *B* propagati; *E, F, G* puncta etia Physica Medii quiescentis, in recta *AC* ad æquales ab invicem distantias sita; *Ee, Ff, Gg*, spatia æqualia

æqualia per breviam per quæ puncta illa motu reciproco singulis vibrationibus eunt & redeunt, e, e_2 & loca quævis intermedia eorundem punctorum, & EF, FG lineolas Physicas seu Medii partes lineares pui sitis illis interiectas, & successive translatas in loca e, e_2 & ef, fg Rediæ Ee æqualis ducatur recta PS . Describatur eadem in O , centroque O & intervallo OP describatur circulus $SIPA$. Per hujus circumferentiam totam cum partibus suis exponatur tempus totum vibrationis unius cum ipsius partibus proportionalibus; sic ut completo tempore quovis PH vel $PHSh$, adnectantur ad PS perpendicularum HL vel bl , & capiatur Le æqualis PL vel Pl , punctum Physicum E representetur in e . Hac lege punctum quodvis E eundo ab L per e ad e_2 , & inde redeundo per e_2 ad L ædem accelerationis ac retardationis gradum vibrationes singulas perat, ac eam oscillante Pendulo. Probandum est quod si regula Medii puncta Physica tali motu agitari debeant. Imaginamur igitur Medium tali motu a cæca quacunquæ cieri, & videamus quid inde sequatur.

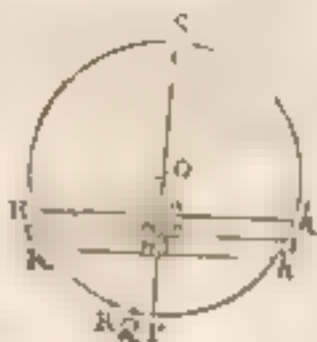
In circumferentia $PHSh$ capiuntur æquales arces HL, LH vel bl, lb , eam habente rationem ad circumferentiam totam quam habent æqualis recta EF, FG ad punctum intervallo totum BC . Et demum perpendicularis IM, KN vel im, kn , quoniam per puncta F, f, G motibus similibus successive agitantur, si PH vel $PH > k$ sit tempus ab initio motus puncti E , erit PI

vel

vel PHS tempus ab initio motus puncti F , &
 PK vel $PHSb$ tempus ab initio motus puncti
 G , & propterea E , F , G , erunt ipsi PL , PM ,
 PN in ita punctorum, vel ipsi Pn , Pm , Pl in
 punctorum reditu, æquales respective. Unde e_2
 in ita punctorum æqualis erit $EG - LN$, in re-
 ditu autem æqualis $EG + ln$. Sed e_2 latitudo
 est seu expansio partis Medii EG in loco e_2 , &
 propterea expansio partis illius in ita, est ad ejus
 expansionem mediocrem ut $EG - LN$ ad EG ,
 in reditu autem ut $EG + ln$ seu $EG + LN$ ad
 EG . Quare cum sit LN ad KH ut IM ad ra-
 dium OP , & EG ad BC ut HK ad circumfer-
 rentiam $PHSbP$, & vicissim EG ad HK ut BC
 ad circumferentiam $PHSbP$, id est (si circum-
 ferentia deatur Z) ut $\frac{OP \times BC}{Z}$ ad OP , & ex
 æquo LN ad EG ut IM ad $\frac{OP \times BC}{Z}$: erit ex-
 pansio partis EG in loco e_2 ad expansionem
 mediocrem quam habet in loco suo primo EG , ut
 $\frac{OP \times BC}{Z} - IM$ ad $\frac{OP \times BC}{Z}$ in ita, utque $\frac{OP \times BC}{Z}$
 $+ lm$ ad $\frac{OP \times BC}{Z}$ in reditu. Unde si $OP \times BC$
 deatur I , erit expansio partis EG punctive I hy-
 si I , ad ejus expansionem mediocrem in ita, ut
 $I - IM$ ad I , in reditu ut $I + lm$ ad I , & eodem
 vires elastice ad vires tam elastice medioc-
 ri in ita, ut $\frac{I}{I - lm}$ ad $\frac{I}{I}$, in reditu ut $\frac{I}{I + lm}$ ad $\frac{I}{I}$.
 Et eodem argumento vires Elastice punctorum
 Physicorum E & G in ita, seu ut $\frac{I}{I - lm}$ &
 $\frac{I}{I + lm}$ ad $\frac{I}{I}$, & vires differentia ad Medii
 vires

vim elasticam mediocrem, ut $\frac{HL - KN}{VV - V \times HL - V \times KN + HL \times KN}$
 ad $\frac{1}{V}$. Hoc est (si ob brevitatem pulsum supponamus HK &
 KN indefinite minores esse quantitate V) ut $\frac{HL - KN}{VV}$ ad $\frac{1}{V}$

sive ut $HL - KN$ ad V . Quare cum quantitas V detur, differ-
 rentia virium est ut $HL - KN$, hoc est (ob proportionales HL -
 $- KN$ ad HK , & OM ad OI vel OP , da-
 tasque HK & OP) ut OM , id est, si Ff bise-
 cetur in Ω , ut $\Omega \epsilon$. Et eodem argumento dif-
 ferentia virium Elasticarum pulserum Phy-
 sicorum, & γ , in reditu lineolæ Physicæ, γ
 est ut $\Omega \epsilon$. Sed differentia illa (id est excessus
 vis Elasticæ puncti supra vim elasticam pun-
 cti γ) est vis qua intercepta Medii lineola
 Physica γ acceleratur, & propterea vis ac-
 celeratrix lineolæ Physicæ, γ est ut ipsius distantia a Medio vi-
 brationis loco Ω . Proinde tempus (per Prop. XXXVIII. Lib I)
 recte exponitur per arcum PI , & Medii pars linearis γ lege
 præscripta moveretur, id est lege oscillantis Penduli: estque par ra-
 tio partium omnium linearium ex quibus Medium totum com-
 ponitur. Q. E. D.



Corol. Hinc patet quod numerus pulsuum propagatorum idem
 sit cum numero vibrationum corporis tremuli, neque multipli-
 catur in eorum progressu. Nam lineola Physica γ , quamprimum
 ad locum suum primum redierit, quietet, neque demceps
 movebitur, nisi vel ab impetu corporis tremuli, vel ab impetu
 pulsuum qui a corpore tremulo propagantur, motu novo creatur.
 Quietet igitur quamprimum pulsus a corpore tremulo propa-
 gari desinunt.

Prop. XLIX. Prob. XII.

Datis Media densitate & vi Elastica, invenire velocitatem pulsuum.
 Imaginamus Medium ab incumbente pondere, pro more Aeris no-
 stris

sibi comprimi, sitque A altitudo Medii homogenei, cuius pondus adaequet pondus incumbens, & cuius densitas eadem ut cum densitate Medii compressi, in quo pulsus propagantur. Constructum autem intelligatur Pendulum, cuius longitudo inter punctum suspensionis & centrum oscillationis sit A . & quo tempore pendulum illud oscillationem integram ex ita & reditu compositam peragit, eodem pulsus eundo conficiet spatium circumferentiae circuli radio A descripti aequale.

Nam stantibus quae in Propositione Superiore constructa sunt, si linea quavis Physica, $E F$ singulis vibrationibus describendo spatium $P S$, urgeatur in extremis itis & reditus euiusque locis P & S , a vi Elastica quae ipsius pondus aequetur, peraget haec vibrationes singulas quo tempore eadem in Cycloide, cuius Perimeter tota longitudo $P S$ aequali est, oscillari possit. Ad adeo quia vires aequales aequalia corporcula per aequalia spatia simul impellent. Quare cum oscillationum tempora sint in diuidata ratione longitudinis pendulorum, & longitudo penduli aequetur dimidio arcui Cycloidis totae, hoc est tempus vibrationis eius ad tempus oscillationis Penduli cuius longitudo est A , in diuidata ratione longitudinis $P S$ id est $P O$ ad longitudo A . Sed vis Elastica qua lineola Physica $L G$ in locis suis extremis P , S existens, urgetur, erat (in demonstratione Propositionis superioris) ad cuius vim totam Elasticam ut $HI = KN$ ad V , hoc est (cum punctum K iam incadat in P) ut HK ad V & vis illa tota, hoc est pondus incumbens, qua lineola $L G$ comprimitur, est ad pondus lineolae ut pendet incumbens altitudo A ad lineolae longitudo EG , adeoque ex aequo, ut qua lineola $L G$ in locis suis P & S urgetur, est ad lineolae vim pondus ut $HK \times A$ ad $V \times EG$. Quare cum tempora, quibus aequalia corporcula per aequalia spatia impelluntur, sunt reciproce in diuidata ratione vimum, erit tempus vibrationis cuiusvis urgente vi illa Elastica, ad tempus vibrationis cuiusvis vi pendetis, in diuidata ratione $V \times EG$ ad $HK \times A$, atque adeo ad tempus oscillationis Penduli cuius longitudo est A , in diuidata ratione $V \times EG$ ad $HK \times A$ & $P O$ ad A conuenienter.

id est (cū fuerit, in superiore Propositione, V æqualis $\frac{PO \times BC}{Z}$,
 & HK æqualis $\frac{EG \times Z}{BC}$) in dimidiata ratione $\frac{PO \text{ qu. } \times BC \text{ qu.}}{Z}$ ad
 $\frac{EG \times Z \times A \text{ qu.}}{BC}$ seu $PO \text{ qu. } \times BC \text{ qu.}$ ad $Z \text{ qu. } \times A \text{ qu.}$ hoc est in ratione
 $PO \times BC$ ad $Z \times A$, seu BC ad $\frac{Z \times A}{PO}$. Sed tempore vibrationis
 unus ex itū & reditū compositæ, pulsus progrediendo conficit la-
 titudinem suam BC . Ergo tempus quo pulsus percurrit spatium
 BC , est ad tempus oscillationis unius, ex itū & reditū compositæ, ut
 BC ad $\frac{Z \times A}{PO}$, id est ut BC ad circumferentiam circuli cuius radius
 est A . Tempus autem, quo pulsus percurrit spatium BC , est ad
 tempus quo percurreret longitudinem huic circumferentiæ æqualem,
 in eadem ratione, ideoque tempore talis oscillationis pulsus percu-
 reret longitudinem huic circumferentiæ æqualem. *Q. E. D.*

Prop. L. Prob. XIII.

Invenire pulsuum distantias.

Corporis, cuius tremore pulsus excitantur, inveniatnr numerus
 Vibrationum dato tempore. Per numerum illum dividatur spa-
 tium quod pulsus eodem tempore percurrere possit, & patet inven-
 ta erit pulsus annis latitudo. *Q. E. I.*

Schol.

Spectant Propositiones novissimæ ad motum Lucis & Sonorum.
 Lux enim cum propagetur secundum lineas rectas, in actione sola
 (per Prop. XLI & XLII) consistere nequit. Soni vero propterea
 quod a corporibus tremulis oriuntur, nihil aliud sunt quam aeris
 pulsus propagati, per Prop. XLIII. Confirmatur id ex tremoribus
 quos excitant in corporibus objectis, si modo vehementes sint & gra-
 ves,

ves, quales sunt soni Tympanorum. Nam tremores celeriores & breviores difficilius excitantur. Sed & sonos quovis, in chordas corporibus sonoris unisonas impactos, excitare tremores non solum est. Confirmatur etiam ex velocitate sonorum. Nam cum pondera specifica Aquæ pluvialis & Argenti vivi sint ad invicem ut 1 ad 13. circiter, & ubi Mercurius in Barometro altitudinem attingit digitorum *Anglicorum* 30. pondus specificum Aeris & aquæ pluvialis sint ad invicem ut 1 ad 850 circiter. erunt pondera specifica aeris & argenti vivi ut 1 ad 1167. Proinde cum altitudo argenti vivi sit 30 digitorum, altitudo aeris uniformis, capis pondus aerem nostrum subiectum comprimere possit, erit 348500 digitorum seu pedum *Anglicorum* 29042. Itaque hæc altitudo illa ipsa quam in constructione superioris Problematis nominavimus A. Circuli radio 29042 pedum descripti circumferentia est pedum 181476. Et cum Penultima digitus 39 longum, oscillationem ex ite & reditu compositum, tempore minorum duorum secundorum, ut notum est, abeat, pendula in pedes 29042, seu digitos 348500, longam, oscillat onem conficiet in tempore minorum secundorum 188. adeoque decetbit. Eodemque tempore sonus progrediendo conficiet pedes 181476, adeoque tempore minuti unius secundi pedes 968. Scribit *Mersennus*, in *Harmonia Universalis* Prop. XXXV. le factis experimentis invenisse quod sonus minuti quinque secundis hexapedas *Gallicus* 1150 (id est pedes *Gallicos* 8900) percurrat. Unde cum pes *Gallicus* sit ad *Anglicum* ut 1008 ad 1000, decetbit sonus tempore minuti unius secundi pedes *Anglicos* 1474 conficere. Scribit etiam idem *Mersennus* *Harmonia Universalis* Geometram christianum in Observatione *Theatrali* observasse commentorum fragorem exaudiri tam esse post 13 vel 14 ab igne vero minuta secunda, cum tamen vix distaret *Leiman* ab illis Tormentis absuerit. Continet *Leuca Galli* hexapedas 2500, adeoque sonus tempore 13 vel 14 secundorum, ex Observatione *Robertalli*, conficiet pedes *Parisienses* 7500, et tempore minuti unius secundi pedes *Parisienses* 560, *Anglicos* vero

verò 600 circiter. Multum differunt hæ Observationes ab invicem, & computus noster mediani locum tenet. In porticu Collegii nostri pedes 208 longa, sonus in termino alterutro excitatus quaterno recursu Longo quadruplicem efficit. Factis autem experimentis inveni quod iniquis toni recurribus pendulum quatuor vel septem digitorum longitudinis oscillabatur, ad priorem toni recursum eundo & ad posteriorem redeundo. Longitudinem penduli satis accurate definire nequebam. sed longitudine quatuor digitorum, observationes nimis celeres esse, ea novem digitorum nimis tardas indicabam. Unde tonus eundo & redeundo consistit pedes 416 minore tempore quam pendulum digitorum novem, & maiore quam pendulum digitorum quatuor oscillatur, id est minore tempore quam 18 minorum tertiorum, & maiore quam 19, & propterea tempore minoribus ita nudi consistit pedes 208 plures quam 866 & pauciores quam 1272, atque adeo velocior est quam pro Observatione Robertalli, ac tardior quam pro Observatione Moyni. Quinetiam accuratioribus postea Observationibus est utique hoc longitudo penduli major esse deberet quam digitorum quinque cum semel, & minor quam digitorum octo, adeoque quaterminus tempore minoribus ita nudi consistit pedes 208 plures quam 920 & pauciores quam 1085. Igitur motus sonorum, secundum ea quæ in Geometricam superius animatum. Inter hos sonos est & talis, quæ dicitur in Prænomenis, quatenus nactenus tentare licet. Proinde cum motus iste pendat ab ære totius deitate, & consequens est, ut ad tonum non sit motus æris vel æris capsa in motionis, sed in æris totius agitatione consistat.

Retragari videntur experimenta quædam de sonis, si vacuo aere vacuis propagari, sed vana aere omni evacuatione perire. & ubi satis evacuantur toni notantur invariari. Sic si in tubo vacuo tantis pars tantam centesima in vase maneat. & cetera. & si vacuo cupit languere, atque adeo non minus tunc quam si quædam et idem in ære libero excitatum audiendo, si binde ad decuplam

plam distantiam a corpore sonoro recederet. Conferenda sunt igitur corpora duo æquanter sonora, quorum alterum in vase evacuato, alterum in aere libero consistat, & quorum distantia ab auditore sint in dimidiata ratione densitatum aeris & si sonus corporis prioris non superat sonum posterioris ob eam cessabit.

Cognita sonorum velocitate, innotescunt etiam intervalla pulsuum. Scribit *Merfennius* (Lib. I. Harmon. corum Prop. IV.) se (factis experimentis quibusdam quæ ibidem describit) invenisse quod nervus tenus vicibus 104 recurret spatio minuti unius secundi, quando tacti Unisonam cum organica Fistula quadrupedali aperta vel bipedali obturata, quam vocant Organum *C fa ut.* Sunt igitur pulsus 104 in spatio pedum 968, quos sonus tempore minuti secundi describit adeoque pulsus unus occupat spatium pedum 9, circiter, id est duplum cæteris longitudinem fistulae. Unde verissimile est quod attenuatines pulsuum, in omnium apertarum fistularum sonis, æquantur dipteris longitudinibus tubularum.

Porro cur Soni cessante motu corporis sonori statim cessant, neque diutius audiuntur ubi longissime distamus a corporibus sonoris, quam cum proxime absumus, patet ex Corollario Propositionis XLVIII Lib. hujus. Sed & cur soni in Tubis Stenterophonis valde augentur, ex allatis principis manifestum est. Motus enim omnis reciprocus si quies recedens a causa generante augeri solet. Motus autem in Tubis dilatationem sonorum impediens tardus amittitur & sonus recitat, & propterea a motu novo singulis reactionis impresso magis augetur. Et hæc sunt præcipua Phænomena Sonorum.

SECT. IX.

De motu Circulari Fluidorum.

Hypothesis.

Resistentiam, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium Fluidi, cæteris paribus, proportionalem esse velocitati, qua partes Fluidi separantur ab invicem.

Prop. LI. Theor. XXXVIII.

Si Cylindrus solidus infinite longus in fluido uniformi & infinito circa axem positione datum uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulsu solo agatur Fluidum in Orbem, perferret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu suo, duo quæ tempora periodica partium fluidi sunt ut ipsarum distantia ab axe cylindri.

Sit *AFL* cylindrus uniformiter circa axem *S* in orbem actus, & circulis concentricis *BGM*, *CHN*, *DIO*, *EKP*, &c. distinguatur fluidum in orbis cylindricos innumeros concentricos solidos ejusdem crassitudinis. Et quoniam homogeneum est Fluidum, impressiones contiguorum orbium in se mutuo tactæ, erunt (per Hypothe-

sin) ut eorum translationes ab invicem & superficies coninguz in quibus impressiones fiunt. Si impressio in Orbem aliquem major est



est vel minor, ex parte concava quam ex parte convexa, prævalebit impressio tortior, & motum Orbis vel accelerabit vel retardabit prout in eandem regionem cum ipsius motu, vel in contrariam dirigatur. Proinde ut Orbis unusquisque in motu suo uniformiter perseveret, debent impressiones ex parte utraque sibi invicem æquari, & fieri in regiones contrarias. Unde cum impressiones sunt ut contiguae superficies & hanc translationes ab invicem, erunt translationes inverse ut superficies, hoc est inverse ut superficierum distantia ab axe. Sunt autem differentiae motuum angularium circa axem ut hæ translationes applicatæ ad distantias, sive ut translationes directæ & distantia inverse, hoc est (conunctis rationibus) ut quadrata distantiarum inverse. Quare si ad infinitæ rectæ $SABCD$ partes singulas erigantur perpendiculara Aa , Bb , Cc , Dd , Ee , &c. ipsarum SA , SB , SC , SD , SE , &c. quadratis reciproce proportionalia, & per terminos perpendicularium ducti intelligatur linea curva Hyperbolica; erunt summae distantiarum, hoc est motus toti angulares, ut respondentes summae linearum Aa , Bb , Cc , Dd , Ee : ut est, si ad constituendam Meram uniformem terribiliam orbium numerus augeatur & latitudo minuat in infinitam ut areae Hyperbolicae his summis Analogæ AaQ , BbQ , CcQ , DdQ , EeQ , &c. & tempora motibus angularibus reciproce proportionalia erunt etiam his areae reciproce proportionalia. Itaque tunc tempus periodicum particulæ cuiusvis D recit proce ut area DdQ , hoc est (per notas Curvarum quadraturas) directe ut distantia SD . QED .

Cor. 1. Hinc motus angulares particularum fluidi sunt reciproce ut ipsarum distantia ab axe Cylindri, & velocitates absolutæ sunt æquales.

Cor. 2. Si fluidum in vase cylindrico longitudo infinitæ continetur, & cylindrum ad æm interiorem contineat, revolvatur autem cylindrus uterque circa axem communem, sintque revolutionum tempora ut ipsorum semidiametri, & perseveret fluidi partibusque in motu suo erunt partium singularem tempora periodica ut ipsarum distantia ab axe cylindrorum. QED .

Corol. 3. Si cylindro & fluido ad hunc modum motus addatur vel auferatur communis qualibet motus angularis; quoniam hoc novo motu non mutatur attritus mutuus partium fluidi, non mutabuntur motus partium inter se. Nam attritiones partium ab invicem pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perseverabit motu, qui attritu utrinque in contrarias partes tacto, non magis acceleratur quàm retardatur.

Corol. 4. Unde si toti cylindrorum & fluidi Systemati auferatur motus omnis angularis cylindri exterioris, habebitur motus fluidi in cylindro quiescente.

Corol. 5. Igatur si fluido & cylindro exteriori quiescentibus, revolvatur cylindrus interior uniformiter, communicabitur motus circularis fluido, & paulatim per totum fluidum propagabitur, nec prius desinet augeri quàm fluidi partes lingule motum Corollario quarto definitum acquirant.

Corol. 6. Et quoniam fluidum conatur motum suum adhuc latius propagare, huius impetu circumagetur etiam cylindrus exterior nisi violenter detentus, & accelerabitur ejus motus quoad usque tempora periodica cylindri utriusque æquentur inter se. Quod si cylindrus exterior violenter detineatur, conabitur is motum fluidi retardare, & nisi cylindrus interior vi aliqua extrinsecus impressa motum suum conservet, efficiet ut idem paulatim cesset.

Quæ omnia in aq̃ia profunda stagnante experiri licet.

Prop. LII. Theor. XXXIX.

Si Sphæra solida, in fluido uniformi & infinito, circa axem positione datum uniformi cum motu revolvatur, & ab huius impulsu solo rotatur fluidum in orbem, perseveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu suo dico quod tempora periodica partium fluidi erunt ut quadrata distantiarum a centro Sphære. Fig. Prop. LI.

Cas. 1. Sit *AF L* Sphæra uniformiter circa axem *S* in orbem acta, & circulis concentricis *BGM*, *CHN*, *DIO*, *EKP*, &c. distinguatur

guatur fluidum in orbes innumeros concentricos ejusdem crassitudinis. Finge autem orbes illos esse solidos, & quoniam homogeneum est fluidum, impressiones contiguorum Orbium in se mutuò factæ, erunt (per Hypothesin) ut eorum translationes ab invicem & superficies contiguæ in quibus impressiones fiunt. Si impressio in orbem aliquem major est vel minor ex parte concava quam ex parte convexa, præva erit impressio fortior, & velocitatem Orbis vel accelerabit vel retardabit, prout in eandem regionem cum ipsius motu vel in contrariam dirigatur. Proinde ut orbis unumquisque in motu suo perleveret uniformiter, debentur impressiones ex parte utraque sibi invicem æquari, & fieri in regiones contrarias. Unde cum impressiones sint ut contiguæ superficies & harum translationes ab invicem, erunt translationes inverse ut superficies, hoc est inverse ut quadrata distantiarum superficialium a centro. Sunt autem differentiarum motuum angularium circa axem ut hæ translationes applicatæ ad distantias, sive ut translationes directe & distantiarum inverse, hoc est (conjectis rationibus) ut cubi distantiarum inverse. Quare si ad rectæ infinitæ $SAB CDEQ$ partes singulas erigantur perpendiculara Aa, Bb, Cc, Dd, Ee , &c. ipsarum SA, SB, SC, SD, SE , &c. cubis reciproce proportionalia, erunt summæ distantiarum, hoc est, motus toti angulares, ut respondentes summæ linearum Aa, Bb, Cc, Dd, Ee . id est (si ad constituendam Medium uniformiter fluidum, numerus Orbium augeatur & latitudo minuatur in infinitum) ut areæ Hyperbolæ his summis analogæ AaQ, BbQ, CcQ, DdQ, EeQ , &c. Et tempora periodica motibus angularibus reciproce proportionalia erunt etiam his areis reciproce proportionalia. Est igitur tempus periodicum orbis cujusvis DI reciproce ut area DdQ , hoc est, (per notas Curvarum quadraturas) directe ut quadratum distantiarum SD . Id quod volui primo demonstrare.

Caf. 2. A centro Sphæræ ducantur infinitæ rectæ quam plurimæ, quæ cum axe datos contineant angulos æqualibus differentibus se mutuo superantes, & his rectis circa axem revolutis concipe orbes in annulos

nulos innumeros fecari, & annulus unusquisque habebit annulos
quatuor sibi contiguos, unum internorem, alterum externum &
duos laterales. Attritu anterioris & posterioris non potest annulus
unusquisque, nisi in motu juxta legem casus primi facti, æquariter
& in partes contrarias urgeri. Patet hoc ex demonstratione casus
primi. Et propterea annulorum series quælibet regitur tantum
tum recta pergens movebitur pro lege casus primi, non quatenus
impeditur ab attritu annulorum ad latera. At in motu facti
facto, attritus annulorum ad latera nullus est, neque adeo motum,
quo minus hac lege fiat, impedit. Si annuli, qui a centro æqua-
liter distant, vel citius revolverentur vel tardius, vel citius pro-
grederentur juxta æquatorem, tardiores accelerarentur, & velocius recederent
vel citius ad attritu mutuo & sic vergerent leviore tempora per ad-
ad æquatorem, pro lege casus primi. Non modo ergo
attritus quo minus motus fiat secundum legem casus primi, &
propterea lex haec obviat, hoc est ut valeat in singulorum tempo-
ra periodica erunt ut quadrata distantiarum ipsorum a centro.
Quod totum iterum demonstrare

Cor. 3. Dividatur jam annulus in tres partes æquales, una trans-
verfis in partibus continetur constanter, & non movetur &
uniformiter flammam, & quoniam & rectius in aspectu ad
legem motus circularis, & ad eam quæ in motu
conducatur, perseverabit motus circularis, & per
annuli omnes quoniam in a perpendiculo a centro
non mutabuntur in motu æquariter. Et in motu
proportione maneat effectus in perpendiculo a centro
tum & periodica tempore. Et tunc. Ceterum cum mo-
tus circularis, & abinde orta vis centrifuga, major sit ad Eclipticam
quam ad polos, deest tunc quædam vis quæ perpendiculo
in circumsistens retinet, & in motu æquariter a centro
dat semper a centro & perpendiculo. Vnde in motu
que per axem ad Eclipticam & perpendiculo.

Corol. 1. Hinc motus angulares partium sunt
sunt reciprocè ut quadrata distantiarum a centro.

absolutè reciprocè ut eadem quadrata applicata ad distantias ab axe.

Corol. 2. Si globus in fluido quiescente similari & infinito circa axem positione datum uniformi cum motu revolvatur, communicabitur motus fluido in morem Vorticis, & motus iste paulatim propagabitur in infinitum, neque prius cessabit in singulis fluidi partibus accerari, quam tempora periodica singularum partium sint ut quadrata distantiarum a centro globi.

Corol. 3. Quoniam Vorticis partes interiores ob maiorem suam velocitatem accerunt & urgent exteriores, motumque ipsis ea actione perpetuo communicant, & exteriores illa eandem motus quantitatem in alios adque exteriores simul transferunt, eaque actione servant quantitatem motus sui plane invariantam; patet quod motus perpetuo transferatur a centro ad circumferentiam Vorticis, & per inhabitatem circumferentiae absorbetur. Materia inter sphaericas duas quavis superficies Vorticis concentricas nunquam accerabitur, eo quod motum omnem à materia interiore acceptum transfert semper in exteriorem.

Corol. 4. Proinde ad conservationem Vorticis constanter in eodem movendi statu requiritur principium aliquod activum a quo globus tandem semper quantitatem motus accipiat quam imprimit in materiam vorticis. Absque tali principio necesse est ut globus & Vorticis partes interiores, propagantes semper motum suum in exteriores, neque novum aliquem motum recipientes, tardelant paulatim & in orbem agi desinant.

Corol. 5. Si globus alter huic Vortici ad certam ab ipsis centro distantiam innaret, & interea circa axem inclinatione datum vi aliqua circumferenter revolveretur, huius motu raperetur fluatam in vorticem, & primo revolveretur hic vortex novus & exiguus una cum globo circa centrum alterius, & interea latius serperet ipsius motus, & paulatim propagaretur in infinitum, ad modum vorticis primi. Et eadem ratione qua huius globus raperetur motu vorticis alterius, raperetur etiam globus alterius motu huius, sic ut globi duo circa intermedium aliquod punctum revolverentur, seque mutuo ob motum

tum illum circularem fugerent, nisi per vim aliquam cohibiti. Postea si vires constanter impressæ, quibus globi in motibus suis perseverant, cessarent, & omnia legibus Mechanicis permetterentur, langueretur paulatim motus globorum (ob rationem in Corol. 3 & 4 assignatam) & vortices tandem conquiescerent.

Corol. 6. Si globi plures datis in locis circum axes positione datos certis cum velocitatibus constanter revolventur, fierent vortices eundem in infinitum pergentes. Nam globi singuli, eadem ratione qua unus aliquis motum suum propagat in infinitum, propagabunt etiam motus suos in infinitum, adeo ut fluidi infiniti pars unaquæque eo ageretur motu qui ex omni uni globorum actione resultat. Unde vortices non desinuntur certis limitibus, sed in se mutuo paulatim excurrent, globiq. per actiones vortium in se mutuo, perpetuo movebuntur de locis suis, ut in Lemmate superiore expositum est neq. certam quamvis in se se positionem servabunt, nisi per vim aliquam retenti. Cessantibus itaque vires illis quæ in globos constanter impressæ conservant hunc motum, materia ob rationem in Corollario tertio & quarto assignatam paulatim requiescet & in vortices agi desinet.

Corol. 7. Si Fluidum simile claudatur in vase sphaerico, ac globi in centro consistentis uniformi rotatione agantur in vorticem, globus autem & vas in eandem partem circa axem eundem revolvantur, sintq. eorum tempora periodica ut quadrata semidiametrorum partium fluidi non prius perseverabunt in motibus suis sine acceleratione & retardatione, quam sint eorum tempora periodica ut quadrata distantiarum a centro vorticis. Alia nulla Vorticis constitutio potest esse permanens.

Corol. 8. Si vas, Fluidum inclusum & globus servant hunc motum, & motu præterea communi angulari circa axem quemvis datum revolvantur; quoniam hoc motu novo non mutatur attritus partium fluidi in se invicem, non mutabuntur motus partium inter se. Nam translationes partium inter se pendunt ab attritu. Pars quilibet in eo perseverabit motu, quo fit ut attritu ex uno latere non magis tardetur quam acceleretur attritu ex altero.

omnem recedere ab axe Vorticis & propterea premix materiam
 omnem interioram. Ex his proinde si materia partium fortis &
 separatio ab invicem difficilior, & per consequens diminuitur mate-
 ria fluiditas. Rursus si partes fluidi sunt alicubi crassiores seu ma-
 jores, fluiditas ibi minor erit, ob pauciores si partes in quibus par-
 tes separentur ab invicem. In majoribus autem adhaerentia & co-
 hesione vel motu de partibus in vellemus ad hanc materiam
 istam suppono. Illud autem hoc in eadem materia non potest
 cohaerere & tenere se adeo per motum & res recipere & non
 gignit propagabitur quam pro ratione superius assignata. Si figura
 vortis non sit sphaerica, & movebuntur particulae in lineis non a circu-
 laribus sed contortis, & ex eadem causa, & tamen per motum
 erunt ut quadrata inter se non distent ut in aequo quod prope
 in partibus inter centrum & circumferentiam in soluta sunt sphe-
 rica, tunc erunt motus, ubi angulus est velut motus, & quod
 in partibus velociter perent circa centrum. Areas enim non
 continentur nisi curvos, & continentur recedente a centro & in aequo
 inque per decrementum huius curvaturae, & in aequo per
 incrementum velocitatis. Pergendo à spatio angustiori is in la-
 tiora recedent particulae longius a centro, sed ubi recedunt & deinde
 accedendo postea de latioribus ad angustiora accedunt, & in
 per vires tardiores & recedunt particulae huiusmodi prope
 centrum. Haec autem est ratio & valet ratio. Nam in huiusmodi
 constituto Vortice non videtur per Propositionem 1. & 2. & 3. & 4. & 5.
 lectum.

Proprietates autem Vorticum hac Propositione intelligere, & rati-
 onis sunt, ut pertinet ad hanc quae ratione Phenomenon explicari
 Vortices explicari possint. Nam Phenomenon est quod Plane-
 rum circa Jovem revolvuntur tempora periodica sunt in ratione
 seiquivalenter distantiarum a centro Jovis, & eadem Ratio ob-
 tinet in Planetis qui circa Solem revolvuntur. Obtenent autem & Ra-
 tio in Planetis istis quae quoniam non sunt, quatenus & serva-
 nes Astronomicae actenus prodidit. Ideoque si Planetarum a Vorti-
 cibus circa Jovem & deinde revolvuntur deferantur & obinere

am hi Vortices eadem lege revolvuntur. Verum tempora periodica partium Vorticis prodierunt in ratione duplicata distantiarum a centro motus. neque potest ratio illa diminui & ad rationem sesquialteram reduci, nisi vel materia vorticis eo fluidior sit quo longius distat à centro, vel resistentia, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi, ex aucta velocitate qua partes fluidi separantur ab invicem, augeatur in majori ratione quam ea est in qua velocitas augeatur. Quorum tamen neutrum rationi consentaneum videtur. Partes crassiores & minus fluida (nisi graves sint in centrum) circumferentiam petent, & verisimile est quod, etiam si Demonstrationum gratia Hypothesin talem ratio Sectionis hujus proposuerim ut Resistentia velocitati proportionalis esset, tamen Resistentia in minori sit ratione quam ea velocitatis est. Quo concessis tempora periodica partium Vorticis erunt in majori quam duplicata ratione distantiarum ab ipsius centro. Quod si vortices (ut aliquorum est opinio) celerius moveantur prope centrum, dein tandem usque ad centrum lateant, tum denuo celerius juxta circumferentiam; certe nec ratio aliqua certa neque alia quavis certa ac determinata obtinere poterit. Videntur itaque Philosophi quo pacto Phænomenon istud rationis sesquialteræ per Vortices explicari possit.

Prop. LIII. Theor. XL.

Corpora quæ in Vortice dilata in orbem redeunt ejusdem sunt densitatis cum Vortice, & eadem lege cum ipsius partibus (quoad velocitatem & cursus determinationem) moventur.

Nam si vorticis pars aliqua exiguæ, cujus particule seu puncta physica datum servant sibi inter se, congelari supponatur: hæc, quoniam neque quoad densitatem suam, neque quoad vim insitam aut figuram suam mutatur, movebitur eadem lege ac prius & contra, si Vorticis pars congelata & solida ejusdem sit densitatis cum reliquo vortice, & resolvatur in fluidum, movebitur hæc eadem lege ac prius, nisi quatenus ipsius particule jam fluidæ factæ moveantur inter se. Negligatur igitur motus particularum inter se, tanquam

quam ad totius motum progressivum nil spectans, & motus totius idem erit ac prius. Motus autem idem erit cum motu aliarum Vorticis partium à centro æqualiter distantium, propterea quod solidum in Fluidum resolutum sit pars Vorticis cæteris partibus consimilibus. Ergo solidum, si sit ejusdem densitatis cum materia Vorticis, eodem motu cum ipsius partibus movebitur, in materia proxime ambiente relative quiescens. Sin densius sit, jam magis conabitur recedere à centro Vorticis quam prius, adeoque Vorticis vim illam, quæ prius in Orbita sua tanquam in æquilibrio constitutum retinebatur, jam superans, recedet a centro & revolvens describet Spiralem, non amplius in eundem Orbem rediens. Et eodem argumento si rarius sit, accedet ad centrum. Igitur non redibit in eundem Orbem nisi sit ejusdem densitatis cum fluido. Eo autem in casu ostensum est, quod revolveretur eadem lege cum partibus fluidi à centro Vorticis æqualiter distantibus. *Q. E. D.*

Corol. 1. Ergo solidum quod in Vortice revolvitur & in eundem Orbem semper redit, relative quiescit in fluido cui innatat.

Corol. 2. Et si vortex sit quoad densitatem uniformis, corpus idem ad quamlibet à centro Vorticis distantiam revolvitur potest.

Scholium.

Hinc liquet Planetas à Vorticibus corporeis non deseri. Nam Planetæ secundum Hypothesin Copernicam circa Solem delati revolvuntur in ellipticis umbilicis habentibus in Sole, & radius ad Solem ductis areas describunt temporibus proportionales. At partes Vorticis tali motu revolvitur nequeant. Designent *A D*, *B E*, *C F*, orbes tres circa Solem *S* descriptos, quorum extrema *C F* circulus sit Soli concentricus, & interiorum duorum Aphelia sint *A*, *B*, & Perihelia *D*, *E*. Ergo corpus quod revolvitur in orbe *C F*, radio ad Solem ducto areas temporibus proportionales describendo, movebitur uniformi cum motu. Corpus autem quod revolvitur in Orbe *B E*, tardius movebitur in Aphelio *B* & velocius in Perihelio *E*, secundum leges Astronomicas, cum tamen secundum leges Mechanicas materia Vorticis in ipso angustiore inter *A* & *C* velocius moveri

moveri debeat quam in spatio latiore inter D & F, id est in Aphelio velocius quam in Perihelio. Quae duo repugnant inter se. Sic



in principio Signi Virginis, ubi Aphelium Martis jam versatur, distantia inter orbes Martis & Veneris est ad distantiam eorundem orbium in principio Signi Piscium ut tria ad duo circiter, & propterea materia Vorticis inter Orbes illos in principio Piscium debet esse velocior quam in principio Virginis in ratione trium ad duo. Nam quo angustius est spatium per quod eadem Materiae quantitas eodem revo-

lutionis unus tempore transit, eo majori cum velocitate transire debet. Igitur si Terra in hac Materia coelesti relative quiescens ab ea deterreretur, & una circa Solem revolveretur, foret haec occasus in principio Piscium ad eandem velocitatem in principio Virginis in ratione sesquialtera. Unde Solis motus annuus apparetur in principio Virginis major esset quam in notationem primam septuaginta, & in principio Piscium minor quam in notationem quadringenta & octo cum tamen (experimentate) apparetur iste Solis motus major in principio Piscium quam in principio Virginis, & propterea Terra velocior in principio Virginis quam in principio Piscium itaque Hypothesis Vortex cum Planetis Astronomicis omnino pugnat, & non tam ad explicandas quam ad perturbandas motus coelestes conuenit. Quomodo vero motus ista in spatio libere a se se Vorticibus peraguntur intelligi potest ex Libro primo, & in Alacdi Systemate plenius docetur.

D E

Mundi Systemate

LIBER TERTIUS.

IN Libris precedentibus principia Philosophiæ tradidi, non tamen Philologica sed Mathematica tantum, ex quibus videretur in rebus Philosophicis disputari possit. Hæc sunt enim motuum & vitæ leges & conditiones, quæ ad Philo-^{sophi-}am maxime spectant. Eadem tamen, ne sterilia videantur, illustravi Scholis quibusdam Philologicis, ea tractans quæ generalia sunt, & in quibus Philosophia maxime fundari videtur, ut corporis indestructam & resistentiam, spacia corporibus vacua, motuumque Jures & Sonorum. Superest ut ex istis principijs doceamus ex illa rationem Systematis Mundi. De hoc argumenti compositionem Librum tertium methodo peragere, ut a paucis legeretur. Sed quibus Principia per se latius intellecta non possint, ut vixum consequatur, in minimis periculis, neque præcipua deponent quibus a multis retro annis obreperant, & propterea ne res in disputationes trahatur, summam utrumque, et transitum in Propositiones, more Mathematico, ut ab his solis legatur qui principia prius evoluerint. Verum tamen quoniam Propositiones, si quando peritine occurrant, quæ Lectoribus etiam Mathematicè doctis moram non tam adesse possint, ac non esse nolo, ut quicquam eas omnes evoluat, ut necesse sit quibus Definitiones Legem naturam & Sectiones præcipuas Libri primi sedulo legat, deinde ad istum Librum de Mundi Systemate, & reliquis Libris præcipua Propositiones huiusmodi præcipua consulat.

HYPOTHESES.

Hypoth. I. *Causas rerum naturalium non plures admitti debere, quam quæ & vera sint & earum Phenomenis explicandis sufficienti.*

Natura enim simplex est & rerum causis superfluis non luxuriat.

Hypoth. II. *Ideoq; effectuum naturalium ejusdem generis eadem sunt causæ.*

Uti respirationis in Homine & in Bestia, descensus lapidum in Europa & in America, Laas in Igne calinari & in Sole, reflexionis lucis in Terra & in Planetis.

Hypoth. III. *Corpus omne in alterius cujuscunque generis corpus transformari posse, & quantatum gradus omnia intermedios successive induere.*

Hypoth. IV. *Centrum Systematis Mundani quiescere.*

Hoc ab omnibus concessum est, dum aliqui Terram alii Solem in centro quiescere contendunt.

Hypoth. V. *Planetas circumjoviales, radius ad centrum Jovis ductis, arcus describere temporibus proportionales, eorumque tempora periodica esse in ratione sesquialtera distantiarum ab ejus centro.*

Constat ex observationibus Astronomicis. Orbes horum Planetarum non differunt sensibiliter a circulis Jovi concentricis, & motus eorum in his circulis uniformes deprehenduntur. Tempora vero periodica esse in ratione sesquialtera semidiametrorum orbium continent Astronomici & Lampladius, qui omnia Micrometro & per Eclipses Saturni accuratius definivit, literis ad me datis, quin etiam numeris suis mecum communicatis, significavit rationem illam sesquialteram tam accurate obtinere, quam sic possibile tentum deprehendere. Id quod ex Tabula sequente manifestum est.

*Satellitum tempora periodica.*1d. 18h. 28¹. 3d. 13h. 17². 7d. 3h. 59³. 16d. 18h. 5⁴.*Distancia Satellitum à centro Jovis.*

<i>Ex Observationibus</i>	1.	2.	3.	4.	
Cassini	5.	8.	13.	23.	} Semidiam. Jovis.
Borelli	5 ¹ .	8 ² .	14.	24 ¹ .	
Townley per Micromet.	5,51.	8,8	13,17	24,72	
Flamstedu per Microm.	5,31.	8,85	13,98	24,23	
Framst. per Fixis Satel.	5,58	8,86	14,150	24,803	
<i>Ex temporibus periodicis.</i>	5,578	8,378	14,168	24,968.	

Hypoth. VI. Planetas quatuor primarios Mercurium, Venerem, Martem, Jovem & Saturnum Orbibus suis Solem cingere.

Mercurium & Venerem circa Solem revolvunt ex eorum phasibus lunariis demonstratur. Plena facie lucentes ultra Solem sita sunt, dimidiata e regione Solis, falcata eis Solem, per diem ejus ad modum macularum nonnunquam transeuntes. Ex Martis quoque plena facie prope Solis conjunctionem, & gibbosa in quadraturis, certum est quod is Solem ambit. De Jove etiam & Saturno idem ex eorum phasibus semper plenas demonstratur.

Hypoth. VII. Planetarum quatuor primarium, & (vel Solis circa Terram vel) Terræ circa Solem tempora periodica esse in ratione sesquialtera mediorum distantiarum a Sole.

Hæc a Keplero inventa ratio in confesso est apud omnes. Eadem utique sunt tempora periodica, eademq. orbium dimensiones, siue Planetæ circa Terram, siue idem circa Solem revolvantur. Ac de mensura quidem temporum periodicorum convenit inter Astronomos universos. Magnitudines autem Orbium Keplerus & Balaubus omnium diligentissime ex Observationibus determinaverunt & distantia mediocres, quæ temporibus periodicis respondent, non

differunt sensibilibus à distantis quas illi invenerunt, suntque inter ipsas ut plurimum intermedie; uti in Tabula sequente videre licet.

Planetarum ac Telluris Distantie mediocres a Sole.

	1	2	3	4	5	6
Secundum Keplerum	951000.	519652.	152350.	100000.	72407.	38806.
Secundum Bradleyum	954198.	522520.	152350.	100000.	72398.	38805.
Secundum Laplaceum	954506.	520116.	152399.	100000.	72333.	38810.

De distantis Mercurii & Veneris a Sole disputandi non est locus, cum hæc per eorum Elongationes a Sole determinantur. De distantis etiam superiorum Planetarum a Sole tollitur omnis disputatio per Eclipses Satellitum Jovis. Item per Eclipses illas determinatur positio umbræ quam Jupiter præcipit, & eo nomine habetur Jovis longitudo Heliocentrica. Ex longitudinibus autem Heliocentrica & Geocentrica inter se collatis determinatur distantia Jovis.

Hypoth. VIII. Planetas primarios radios ad Terram ductis areas describere temporibus unumque proportionales, at radios ad Solem ductis areas temporibus proportionales percurrere.

Nam respectu terræ nunc progrediuntur, nunc stationarii sunt, nunc etiam regrediuntur. At Solis respectu semper progrediuntur, itaque propemodum uniformi cum motu, sed paulo ceteris tamen in Perihæis ac tardius in Aphæis, sicut arearum æquales sic descriptio. Propositionis est Astronomi novissima, & a Jove apprime demonstratur per Eclipses Satellitum quibus Eclipsibus Heliocentricas Planetæ ac longitudes & distantias a Sole determinari diximas.

Hypoth. IX. Lunam radio ad centrum terræ ducto aream temporis proportionalem describere.

Pater ex Lunæ motu apparente cum ipsius diametro apparente collato. Perturbatur autem motus Lunaris atquantulum a visis, seu errorum insensibiles minutias Phycis in hæc Hypothesibus negligo.

Prop. I. Theor. I.

Vires, quibus Planete circumjoviales perpetuo retrahuntur à motibus rectilineis & in orbibus suis retinentur, respicere centrum Jovis, & esse reciproce ut quadrata distantiarum locorum ab eodem centro.

Patet pars prior Propositionis per Hypoth. V. & Prop. II. vel III. Lib. I. & pars posterior per Hypoth. V. & Corol. 6. Prop. IV. ejusdem Libri.

Prop. II. Theor. II.

Vires, quibus Planete primarii perpetuo retrahuntur à motibus rectilineis, & in Orbibus suis retinentur, respicere Solem, & esse reciproce ut quadrata distantiarum ab ipsius centro.

Patet pars prior Propositionis per Hypoth. VIII & Prop. II. Lib. I. & pars posterior per Hypoth. VII & Prop. IV. ejusdem Libri. Accuratissime autem demonstratur hæc pars Propositionis per quætem Apheliorum. Nam aberratio quam minima à ratione duplicata (per Corol. I Prop. XLV. Lib. I.) motum Apfidum in singulis revolutionibus notabilem, in pluribus enormem efficere deberet.

Prop. III. Theor. III.

Vim qua Luna retinetur à parte sua re tenere terram, & esse reciproce ut quadratum distantie locorum ab ipsius centro.

Patet assertionis pars prior, per Hypoth. IX. & Prop. II. vel III. Lib. I. & pars posterior per motum Lunæ Apogæi. Nam motus ille, qui singulis revolutionibus est graduum tantum trium in circulo, contemni potest. Patet enim, per Corol. 1. Prop. III. Lib. I. quod si distantia Luna à centro Terræ calculatur

tur D , vis à qua motus talis oritur, sit reciproce ut $D \propto \frac{1}{r^2}$, id est reciproce ut ea ipsius D dignitas, cuius index est 2, hoc est in ratione distantiae paulo maiore quam duplicata inverse, sed quae vicibus 60; propius ad duplicatam quam ad triplicatam accedit. Tantillus autem accessus mentò contemnendus est. Oritur verò ab actione Solis (ubi posthac dicetur) & propterea hic negligendus est. Restat igitur ut vis illa, quae ad Terram spectat, sit reciproce ut D^2 , id quod etiam plenius constabit, conferendo hanc vim cum v. gravitatis, ut sit in Propositione sequente.

Prop. IV. Theor. IV.

Lunam gravitare in terram, & vi gravitatis retrahi semper a motu rectilineo, & in orbe suo retineri.

Lunae distantia mediocri a centro Terrae est semidiametrorum terrestrium, secundum plerisque Astronomorum 59, secundum Vendelinum 60, secundum Copernicum 60, secundum Kircherum 62, & secundum Tychohem 56. Ast Tycho, & quotquot eas Tabulas retractionum sequuntur, constituendo retractiones Solis & Lunae (omnino contra naturam Lucis) maiores quam fixarum, idque tempus quasi quatuor vel quinque, auxerunt Parallaxin Lunae scrupulis totidem, hoc est quasi duodecima vel decima quinta parte totius parallaxeos. Corrigitur iste error, & distantia evadet quasi 61 semidiametrorum terrestrium, tere ut ab aliis assignatum est. Assumamus distantiam mediocrem sexaginta semidiametrorum, & Lunarem periodum respectu fixarum compleri diebus 27, horis 7, minutis primis 43, ut ab Astronomis statuitur, atque ambitum Terrae esse pedum Parisiensium 23249600, ut à Gallis mensurantibus nuper definitum est: & si Luna motu omni privati fingatur, ac dimitti ut, urgente vi illa omni quae in Orbe suo retinetur, descendat in terram; haec spatio minuti primi cadendo describeret pedes Parisienses 15. Corrigitur hoc

hoc ex calculo, vel per Propositionem xxxvi Libri primi, vel (quod eodem recedit) per Scholium Propositionis quartæ ejusdem Libri, confecto. Unde cum vis illa accedendo ad terram augeatur in duplicata distantia ratione inversâ, adeoque ad superficiem Terræ major sit visibus 60 x 60 quam ad Lunam, corpus vi illa in regionibus nostris cadendo describere deberet spatio in minuti unius primi pedes Parisienses 60 x 60 x 15, & spatio minuti unius secundi pedes 15. Atqui corpora in regionibus nostris vi gravitatis cadendo describunt tempore minuti unius secundi pedes Parisienses 15, uti *Hugenius*, factis pendulorum experimentis & computo inde inito, demonstravit: & propterea vis quæ Luna in orbe suo retinetur, illa ipsa est quam nos gravitatem dicere solemus. Nam si gravitas ab ea diversa est, corpora visibus utrique conjunctis Terram petendo duplo velocius descendent, & spatio minuti unius secundi cadendo describent pedes Parisienses 30: omnino contra experientiam.

Calculus hic fundatur in Hypothesi quod Terra quiescat. Nam si Terra & Luna circa Solem moveantur, & interea quoque circa commune gravitatis centrum revolvantur: distantia centrorum Lunæ ac Terræ ab invicem erit 60; semidiametrorum terrestrium, uti computationem (per Prop. LX. Lib. I.) incanu patebit.

Prop. V. Theor. V.

Planetæ circumjoviales gravitate in Jovem, & circumjoviales in Solem, & vi gravitatis suæ retenti semper à motibus resistunt, & in orbibus curvilineis retineri.

Nam revolutiones Planetarum circumjovialium circa Jovem, & Mercurii ac Veneris æqueque circumloarum circa Solem sunt Phænomena ejusdem generis cum revolutione Lunæ circa Terram: & propterea per Hypoth. II. a causis ejusdem generis dependent præterea cum demonstratum sit quod vires, a quibus revolutiones illæ dependent, respiciant centra Jovis ac Solis, & recedendo

cedendo a Jove & Sole decreſcant eadem ratione ac lege, qua vis
gravitatis decreſcit in reſſu à Terra.

Corol. Igitur gravitas datur in Planetas universos. Nam Venerem, Mercurium ceteroque esse corpora ejusdem generis cum Jove nemo dubitat. Certe Planeta Hugenianus, eodem argumento quo Satellites Jovis gravitant in Jovem, gravis est in Saturnum. Et cum attractio omnis (per motus legem tertiam) mutua sit, Saturnus vicissim gravitabit in Planetam Hugenianum. Eodem argumento J. pter in Satellites suos omnes, Terraque in Lunam, & Sol. in Planetas omnes primarios gravitabit.

Corol. 2. Gravitationem, quæ Planetam unumquemque respicit, esse
reciproce ut quadratum distantiae locorum ab ipsius centro.

Prop. VI. Theor. VI.

Corpora omnia in Planetis singulis gravitare, & pondera eorum in eun-
dem quocunque Planetam, paribus distantis a centro Planetæ, proporti-
onalia esse quantitati materiæ in singulis

Defectus gravium omnium in Terram (semper saltem inaequali retardatione quae ex Aëris perexiguitate insistentia oritur) aequalibus temporibus fieri jam dudum observavit alii, & accuratissime quidem notare aëre aequalitatem temporum in Pendulis. Rem tentavi in aëre, argento, plumbo, vitro, arena, sale communis, igno, aqua, &c. Comparabam per xides duas ligneas rotundas & aequales. Unam impiccam ligno, & idem rursum pondus suspendebam (quam potui exacte) in aëre ut centro oscillationis. Pixides ab aequalibus pedum indecimum his pendentes constituabant Pendula, quoad pondus, figuram & aëris resistentiam omnino paria. In paribus oscillationibus juxta perire ibant una & redibant de aëre. Pondus copia materiae in aëre per Cart. 1. & 6. Prop. XXV. Lib. II. erat ad eam in igno, & vis motus aëris in totum aërem ad eandem actionem in totum lignum; hoc est

est ut pondus ad pondus. Et sit in cæteris. In corporibus eadem pondus differentia materię, quę vel minor esset quam pars millesima materię totius, his experimentis manifeste deprehendi potuit. Jam vero naturam gravitatis in Planetas eandem esse atque in Terram non est dubium. Elevari enim finguntur corpora hæc Terræ ad usque Orbem Lunę, & una cum Lunâ motu omni privata demitti, ut in Terram simul cadant, & per jam ante ostensa certum est quod temporibus æqualibus describerent æqualia Spatia cum Luna, æqueque quod sunt ad quantitatem materię in Luna, ut pondera sua ad ipsius pondus. Porro quoniam Satellites Jovis temporibus revolvuntur quę sunt in ratione sesquialtera distantiarum a centro Jovis, erunt eorum gravitates acceleratrices in Jovem reciproce ut quadrata distantiarum a centro Jovis, & propterea in æqualibus a Jove distantis eorum gravitates acceleratrices evaderent æquales. Proinde temporibus æqualibus ab æqualibus altitudinibus cadendo describerent æqualia Spatia, perinde ut sit in gravibus, in hac Terra nostra. Et eodem argumento Planetę circulares ab æqualibus a Sole distantibus dimissi, de sensu suo in Solem æqualibus temporibus æqualia spacia describerent. Vires autem, quibus corpora inæqualia æqualiter accelerantur, sunt ut corpora, hoc est pondera ut quantitates materię in Planetis. Porro Jovis & ceteris Satellitum pondera in Solem proportionalia esse quantitatibus materię eorum, patet ex motu Satellitum quam maxime regulari, per Corol. 3. Prop. LXV. Lib. I. Nam si horum aliqui magis traherentur in Solem pro quantitate materię suę quam ceteri, motus Satellitum (per Corol. 1. Prop. LXV. Lib. I.) ex inæqualitate attractionis perturbarentur. Si (paribus a Sole distantibus) Satellites aliquis gravior esset in Solem pro quantitate materię suę, quam Jupiter pro quantitate materię suę, in ratione quacunque data, puta d ad e , distantia inter centrum Solis & centrum Orbis Satellitis maior semper foret quam distantia inter centrum Solis & centrum Jovis ut ratione dimidiata quam proxime, uti Galilæus quibuldam in casibus invenit. Et si Satellites minus gravis esset in Solem in ratione illa d ad e , distantia

centr. Orbis Satellitis a Sole minor foret quam distantia centri Jovis a Sole in ratione illa diminuta. Igitur si in aequalibus a Sole distantia gravitas acceleratrix Satellitis cujusvis in Solem major esset vel minor quam gravitas acceleratrix Jovis in Solem, parte tantum novissima gravitatis totius, foret distantia centri Orbis Satellitis a Sole major vel minor quam distantia Jovis a Sole parte $\frac{1}{2}$ distantiae totae, id est parte quanta distantia Satellitis extima a centro Jovis. Egit quidem Orbis eccentricitatis foret valde ambigua. Sed Orbis Satellitis concentricus Jovi concentricus, & propterea gravitates acceleratrices Jovis & Satellitis in Solem aequantur inter se. Et eodem argumento pondera Saturni & Cometae, & in Solem, & aequantur a Sole distantiae, hinc ut quantitates materiae a partibus pondera Lunae ac Terrae in Solem vel in haec sit vel eadem massa accurate proportionalia.

Quantitatem pondera partium flag. Iarum Plurimarum cujusque in alium quocunque hanc materiam in partibus si gress. Nam si partes aliquae plus gravitent, aut minus, quam pro quantitate materiae, Planetarum, pro genere partium quibus maxime accidet, gravitates magis vel minus quam pro quantitate materiae totius. Sed nec relatae sunt partes ad externam hanc vel internam. Nam si verbi gratia a corpore Terrae hanc quae apud nos hanc, in Orbem Lunae elevati hinc hanc, & accelerantur eadem corpore Lunae. Si hanc in pondera essent ad pondera partium externarum in Lunae ac quantitates aetheris in eadem, & pondera vero partium internarum in materiae in eadem, hanc eadem ad pondera Lunae totius in materiae vel minor vel major quam supra esse videtur.

Coroll. 1. Hinc pondera corporum non pendunt ab eorum figurae & textura. Nam si eorum massa variata fuisset, hanc materiae in materia pro varietate hanc non eadem materia minus contra experientiam.

Coroll. 2. Igitur pondera vera quae circa Terram sunt, gravitates Terrae & pondera omnium, quae aequaliter a centro Terrae sunt, sunt ut quantitates materiae in eadem. Nam si aether aut

aut corpus aliud quodcumque vel gravitate omnino deest tueretur vel pro quantitate materiae suae minus gravitaret, quoniam ad non differret ab aliis corporibus nisi in forma materiae, posset idem per mutationem formae gradatam transmutari in corpus eisdem conditionis cum his quae pro quantitate materiae quam maxime gravitant, (per Hypoth. III) & vicissim corpora maxime gravia, formam illius gradatam induendo, possent gravitatem suam gradatam amittere. Ac prout pondera penderent a formis corporum, posset quoque cum formis variari, contra quam probatum est in Corollario superiore.

Corol. 3. Itaque Vacuum necessario datur. Nam si ipsa omnia plena essent, gravitas specifica sit id, quo regio aeris impletur, ob summam densitatem materiae, aut cederet gravitati specifice argenti vivi, vel auri, vel corporis alterius cupietiusque densissimi, & propterea nec aurum neque aliud quodcumque corpus in aere descendere posset. Nam corpora in fluitant, non specificè graviora sint, minime descendunt.

Corol. 4. Gravitationem diversi generis esse a vi magnetica. Nam attractio magnetica non est ut materia attracta. Corpora aequalia magis trahuntur, alia minus, platina non trahuntur. Estque vis magnetica longe major pro quantitate materiae quam vis gravitatis sed & in eodem corpore intend. potest & remitti, in recessu vero a magnete decrevit in ratione distantiae plus quam duplicata, propterea quod vis longe fortior sit in contactu, quam cum attrahentia vel minime in separentur ab invicem.

Prop. VII. Theor. VII

Gravitationem in corpora universa fieri, eamque proportionalem esse quantitati materiae in singulis.

Planetas omnes in se mutuo graves esse jam ante probavimus, ut & gravitatem in unumquemque seorsim spectatum esse recte propter quadratum distantiae locorum a centro Planetarum. Et inde consequens

est, (per Prop. LXX. Lib. I. & ejus Corollaria) gravitatem in omnes proportionalem esse materię in eisdem.

Porro cum Planetę cuiusvis *A* partes omnes graves sint in Planetam quemvis *B*, & gravitas partis cuiusque sit ad gravitatem totius, ut materia partis ad materiam totius, & actioni omni reactio (per motus Legem tertiam) æqualis sit, Planeta *B* in partes omnes Planetę *A* vicissim gravitabit, & erit gravitas sua in partem unamquamque ad gravitatem suam in totum, ut materia partis ad materiam totius. *Q. E. D.*

Corol. 1. Oritur igitur & componitur gravitas in Planetam totum ex gravitate in partes singulas. Cujus rei exempla habemus in attractionibus Magneticis & Electricis. Oritur enim attractio omnis in totum ex attractionibus in partes singulas. Res intelligitur in gravitate, concipiendo Planetas plures minores in unum Globum coire & Planetam majorem componere. Nam vis totius ex viribus partium componentium oriri debet. Siquis objiciat quod corpora omnia, quę apud nos sunt, hac lege gravitare deberent in se mutuo, cum tamen ejusmodi gravitas neut quam sentiatur. Respondetur quod gravitas in hæc corpora, cum sit ad gravitatem in Terram totam ut sunt hæc corpora ad Terram totam, longe minor est quam quę sentiiri possit.

Corol. 2. Gravitatio in singulas corporis particulas æquales est rec proce ut quadratum distantię locorum à particulis. Patet per *Corol. 3. Prop. LXXIV. Lib. I.*

Prop. VIII. Theor. VIII.

Si Globorum duorum in se mutuo gravitantium materia undique, in regionibus quę a centrīs æqualiter distant, homogenea sit: erit pondus Globi alterutrius in alterum reciproce ut quadratum distantię inter centra.

Postquam invenissem gravitatem in Planetam totum oriri & componi ex gravitatibus in partes, & esse in partes singulas reciproce
pro-

proportionalem quadratis distantiarum a partibus: dubitabam an reciproca illa proportio duplicata obtineret accurate in vi tota ex viribus pluribus composita, an vero quam proxime. Nam fieri posset ut proportio illa in majoribus distantis satis obtineret, ac prope superficiem Planetæ, ob inæquales particularum distantias & situs dissimiles, notabiliter erraret. Tandem vero, per Prop. LXXV Libri primi & ipsas Corollaria, intellexi veritatem Propositionis de qua hic agitur.

Corol. 1. Hinc inveniri & inter se comparari possunt pondera corporum in diversos Planetas. Nam pondera corporum æqualium circum Planetas in circulis revolventium sunt (per Prop. IV. Lib. I.) ut diametri circulorum directe & quadrata temporum periodicorum inverse, & pondera ad superficies Planetarum aliasve qualvis a centro distantias majora sunt vel minora (per hanc Propositionem) in duplicata ratione distantiarum inverſa. Sic ex temporibus periodicis Veneris circa Solem dierum 224³, Satellitis extimi circumjovialis circa Jovem dierum 16³, Satellitis Hugeniæ circa Saturnum dierum 15 & horarum 22³, & Lunæ circa Terram 27 dier. 7 hor. 43³ mot. collatis cum distantia mediocri Veneris a Sole, cum Elongatione maxima Heliocentrica Satellitis extimi circumjovialis, quæ (in mediocri Jovis a Sole distantia juxta observationes *Flamſtedii*) est 8. 13, cum elongatione maxima Heliocentrica Satellitis Saturni 3. 20³; & cum distantia Lunæ a Terra, ex Hypothesi quod Solis parallaxis horizontalis seu semidiameter Terræ a Sole visæ sit quasi 20³, calculum inveniundo invenio quod corporum æqualium & a Sole, Jove, Saturno ac Terra æqualiter distantium pondera in Solem, Jovem, Saturnum ac Terram forent ad invicem ut 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{12}$ & $\frac{1}{16}$ - respective. Est autem Solis semidiameter ee mediocriſ apparentis quasi 16. 6. Illam Jovis a Sole visam *Flamſtedius*, ex ambre Jovialis diametro per Eclipses Satellitum inventa, determinavit esse ad elongationem Satellitis extimi, et 1 ad 24. adeoque cum elongatio illa sit 8. 13 semidiameter Jovis a Sole visæ erit 19³. Diameter Saturni est

est ad diametrum Annæ ut 4 ad 9, & diameter annuli e Sole visi (non inane *transit*) 50, adeoque semidiameter Saturni e Sole visi 11. Martem dicere 10 vel 9, propterea quod globus Saturni per hanc inæqualem refrangibilitatem nonnulli videtur. Hinc into calculo procedunt verae Solis, Jovis, Saturni ac Terræ semidiametri ad invicem ut 10000, 1063, 889, & 208. Hæc cum pondera æqualium corporum a centrâ Solis, Jovis, Saturni ac Terræ æquales distantiam sint in Solem, Jovem, Saturnum ac Terram ut 1, , , & respective, & a ictis vel a ictibus hanc is diminuantur vel augmentur pondera in duplicata ratione, erunt pondera eorundem æqualium corporum in Solem, Jovem, Saturnum & Terram, in distantibus 10000, 1063, 889 & 200 a eorum centrâ, atque acco in eorum superficiebus variantibus, ut 10000, 804, 536 & 805 respective. Pondera corporum in superficie Jovis levis duplo minora erit quam pondera corporum in superficie Terræ dicemus in sequentibus.

Coro. 2. Igitur pondera corporum æqualium, in superficiebus Terræ & Planetarum, sunt inter se ut quadrata diametrorum apparentium e Sole visarum. De Terræ quidem diametro e Sole visam nondum constat. Hanc ad ampli 40, propterea quod observatores *Apart*, *R* & *Lent* non multo maiorem esse permittunt, cum *Horrox* & *Lent* du observaciones paulo minorem adhibere videantur. Et auctori non exenti peccare. Quod si forte diameter ista & gravitas in superficie Terræ maximis sit inter diametros Planetarum & gravitas in eorum superficiebus: quoniam Saturni, Jovis, Martis, Veneris & Mercurii e Sole visorum diametri sunt 18, 39, 8, 23, 20 cæter, erit diameter Terræ quasi 24, adeoque Parallaxis Solis quasi 12, ut *Horrox* & *Lent* prope nodum *Apart*. Sed diameter paulo minor mensuratur cum Regula hujus Corollarii.

Coro. 3. Innotescit etiam quantitas materiæ in Planetis singulis. Nam quantitates hæc sunt ut Planetarum Vires in distantibus æqualibus ad est in Sole, Jove, Saturno ac Terra ut 1,

$\frac{1}{10}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{15}$, respective. Si Parallaxis Solis statuatur minor quam 20, debet quantitas materię in Terra diminui in triplicata ratione.

Corol. 4. Innescunt etiam densitates Planetarum. Num corporum æqualium & homogeneorum pondera ut Sphæræ homogeneas in superficiebus Sphærarum, sunt ut Sp. æquarum diametri per Prop. LXXII. Lib. I. ideoque Sp. æquarum heterogenearum densitates sunt ut pondera applicata ad diametros. Erant autem veræ Solis, Saturni, Jovis ac Terræ diametri ad invicem ut 10000, 889, 1003 & 208, & pondera in eisdem ut 10000, 536, 804, & 805, & propterea densitates sunt ut 100, 60, 76, 387. Densitas autem Terræ, quæ hic colligitur, non pendet a Parallaxi Solis, sed determinatur per parallaxin Lunæ, & propterea hic recte determinatur. Est igitur Sol paulo densior quam Jupiter, & Terra multo densior quàm Sol.

Corol. 5. Planetarum autem densitates inter se tere sunt in ratione composita ex ratione distantiarum a Sole & ratione dimidiata diametrorum apparentium c. Sole visarum. Nempe Saturni, Jovis, Terræ & Lunæ densitates 60, 76, 387 & 700, tere sunt ut distantiarum reciproca, , , , & , ducta in radices diametrorum apparentium 18, 37, 40, & 11. Diximus itaque, in Corollario secundo, gravitatem ad superficies Planetarum esse quam proxime in ratione dimidiata apparentium diametrorum c. Sole visarum, & in Lemmate quarto densitates esse ut gravitates illæ applicatæ ad diametros veras ideoque densitates tere sunt ut radices diametrorum apparentium applicatæ ad diametros veras, hoc est reciproce ut distantia Planetarum a Sole ductæ in radices diametrorum apparentium. Collocavit igitur Deus Planetas in diversis distantis a Sole, ut quiesceret pro gradu densitatis calore Solis maiore vel minore tractatur. Aqua nostra, si Terra locaretur in orbe Saturni, bulliret, si in orbe Mercurii in vapores statim abiret. Nam ex Sole, cui calor proportionalis est, septuplo densior est in orbe Mercurii quam apud nos. & Ther-

mometer

mometro expertus sum quod septuplo Solis æstivi calore aqua ebullit. Dubium verò non est quin materia Mercuri ad calorem accommodetur, & propterea densior sit hæc nostra; cum materia omnis densior ad operationes Naturales obeundas majorem calorem requirat.

Prop. IX. Theor. IX.

Gravitatem pergendo a superficiebus Planetarum deorsum decrescere in ratione distantiarum a centro quam proximè.

Si materia Planetæ quoad densitatem uniformis esset, obtineret hæc Propositio accurate: per Prop. LXXIII. Lib. I. Error igitur tantus est, quantus ab inæquabili densitate ori possit.

Prop. X. Theor. X.

Motus Planetarum in Cælis diutissime conservari posse.

In Scholio Propositionis XL. Lib. II. ostensum est quod globus Aquæ congelatæ in Aere nostro, liberè movendo & longitudinem semidiametri suæ describendo, ex resistentia Aeris amitteret motus sui partem $\frac{1}{1000}$. Obtinet autem eadem proportio quam proximè (per Prop. XL. Lib. II) in globis utrinque magnis & velocibus. Jam verò Globum Terræ nostræ densiorem esse quam si totus ex Aqua constaret, sic colligo. Si Globus hucce totus esset aqueus, quæcunque rariora essent quam aqua, ob minorem specificam gravitatem emergerent & supernatarent. Eaque de causa Globus certus aquis undique coopertus, si rarior esset quam aqua, emergeret alicubi, & aqua omnis inde defluens congregaretur in regione opposita. Et par est ratio Terræ nostræ maribus magna ex parte circumdatæ. Hæc si densior non esset, emergeret ex maribus, & parte sui pro gradu levitatis extaret ex Aqua, maribus omnibus in regionem

regionem oppositam confluentibus. Eodem argumento maculae Solares leviores sunt quam materia lucida Solaris cui supernatant. Et in formatione qualicunque Planetarum, materia omnis gravior, quo tempore massa tota fluida erat, centrum petebat. Unde cum Terra communis suprema quasi duplo gravior sit quam aqua, & paulo inferius in fodinis quasi triplo vel quadruplo aut etiam quintuplo gravior reperitur. verisimile est quod copia materiae totius in Terra quasi quintuplo vel sextuplo major sit quam si tota ex aqua constaret, praeterum cum Terram quasi quintuplo densiorem esse quam Jovem jam ante ostensum sit. Igitur si Juppiter paulo densior sit quam aqua, hic spatio decem viginti & unius, quibus longitudinem 320 semidiametrorum suarum describit, amitteret in Medio ejusdem densitatis cum Aere nostro motus sui partem fere decimam. Verum cum resistentia Mediorum minuat in ratione ponderis ac densitatis, sic ut aqua, quae vicibus 13; levior est quam argentum vivum, minus resistat in eadem ratione; & aer, qui vicibus 800 levior est quam aqua, minus resistat in eadem ratione. si ascendatur in coelos ubi pondus Medii, in quo Planetae moventur, diminuitur in unum, resistentia prope cessabit.

Prop. XI. Theor. XI.

Commune centrum gravitatis Terra Solis & Planetarum omnium quiescere.

Nam centrum illud (per Legum Corol. 4.) vel quiescet vel progredietur uniformiter in directum. Sed centro illo semper progrediente, centrum Mundi quoque movebitur contra Hypothesin quartam.

Prop. XII. Theor. XII.

*Solem motu perpetuo agitari sed nunquam longe recedere à communi
gravitatis centro Planetarum omnium.*

Nam cum, per Corol. 3. Prop. VIII. materia in Sole sit ad materiam in Jove ut 1100 ad 1, & distantia Jovis a Sole sit ad semidiametrum Solis in eadem ratione circiter, commune centrum gravitatis Jovis & Solis incidet fere in superficiem Solis. Eodem argumento cum materia in Sole sit ad materiam in Saturno ut 2360 ad 1, & distantia Saturni a Sole sit ad semidiametrum Solis in ratione paulo minori incidet commune centrum gravitatis Saturni & Solis in punctum paulo infra superficiem Solis. Et ejusdem calculi vestigis insistendo si Terra & Planetæ omnes ex una Solis parte consisterent, commune omnium centrum gravitatis vix integra Solis diametro a centro Solis distaret. Aliis in casibus distantia centrorum semper minor est. Et propterea cum centrum illud gravitatis perpetuo quiescat, Sol pro vario Planetarum situ in omnes partes movebitur, sed à centro illo nunquam longe recedet.

Corol. Hinc commune gravitatis centrum Terræ, Solis & Planetarum omnium pro centro Mundi habendum est. Nam cum Terra, Sol & Planetæ omnes gravitent in se mutuo, & propterea, pro vi gravitatis hujus, secundum leges motus perpetuo agitentur perspicuum est quod horum centra mobilia pro Mundi centro quiescente haberi nequeant. Si corpus illud in centro locandum esset in quod corpora omnia maxime gravitant (uti vulgi est opinio) privilegium istud concedendum esset Soli. Cum autem Sol moveatur, eligendum erit punctum quiescens, a quo centrum Solis quam minime distaret, & a quo idem adhuc minus distaret, si modo Sol sentior esset & major, ut minus moveretur.

Prop. XIII Theor. XIII.

Planete moventur in Ellipsis umbilicum habentibus in centro Solis, & radius ad centrum iund ductis areas describunt temporibus proportionales.

Disputavimus supra de his motibus ex Phenomenis. Jam cognitis motuum principis, ex his colligimus motus coelestes a priori. Quoniam pondera Planetarum in Solem sunt reciproci ut quadrata distantiarum a centro Solis, si Sol quiesceret & Planetae reliqui non agerent in se mutuo, forent orbes eorum Elliptici, Solem in umbilico communi habentes, & areas describerentur temporibus proportionales (per Prop. I. & XI, & Corol. 1. Prop. XIII. Lib. I) Actiones autem Planetarum in se mutuo perexiguae sunt (ut possint contemni) & motus Planetarum in Ellipsis circa Solem mobilem minus perturbant (per Prop. LXXI. Lib. I) quam si motus isti circa Solem quiescentem peragerentur.

Actio quidem Jovis in Saturnum non est omnino contemnenda. Nam gravitas in Jovem est ad gravitatem in Solem (patetibus distantis) ut 1 ad 1100, adeoque in conjunctione Jovis & Saturni, quoniam distantia Saturni a Jove est ad distantiam Saturni à Sole fere ut 4 ad 9, est gravitas Saturni in Jovem ad gravitatem Saturni in Solem ut 81 ad 16 x 1100 seu 1 ad 217 circiter. Error tamen omnis in motu Saturni circa Solem, a tanta in Jovem gravitate orundus, evitari fere potest constituendo umbilicum Orbis Saturni in communi centro gravitatis Jovis & Solis (per Prop. LXXII. Lib. I.) & propterea non maximus est vix superat minutos duos primos. In conjunctione autem Jovis & Saturni gravitates acceleratrices Solis in Saturnum, Jovis in Saturnum & Jovis in Solem sunt fere ut 16, 81 & $\frac{1}{1100}$ seu 122342, adeoque differentia gravitatum Solis in Saturnum & Jovis in Saturnum est ad gravitatem Jovis in Solem ut 65 ad 122342 seu 1 ad 1867

Huic autem differentiae proportionalis est maxima Saturni efficacia ad perturbandum motum Jovis, & propterea perturbatio orbis Jovialis longe minor est quam ea Saturni. Reliquorum orbium perturbationes sunt adhuc longe minores.

Prop. XIV. Theor. XIV.

Orbium Aphelia & Nodi quiescunt.

Aphelia quiescant, per Prop. XI. Lib. I. ut & orbium plana, per ejusdem Libri Prop. I. & quiescentibus planis quiescunt Nodi. Atamen a Planetarum revolventium & Cometarum actionibus in se invicem orientur inaequalitates aliquae, sed quae ob parvitatem contemni possunt.

Corol. 1. Quiescunt etiam Stellae fixae, propterea quod datas ad Aphelia Nodisque positiones servant.

Corol. 2. Ideoque cum nulla sit earum parallaxis sensibilis ex Terrae motu annuo oriunda, vires earum ob immensam corporum distantiam nullos edent sensibiles effectus in regione Systematis nostri.

Prop. XV. Theor. XV.

Invenire Orbium transversas diametros.

Capiendae sunt hae in ratione sesquialtera temporum periodicorum, per Prop. XV. Lib. I. deinde ligatae augendae in ratione summæ massarum Solis & Planetæ cujuscunque revolventis ad primam duarum medie proportionalium inter summam illam & Solem, per Prop. LX. Lib. I.

Prop. XVI. Prob. I.

Invenire Orbium Excentricitates & Aphelia.

Problema confit per Prop. XVIII. Lib. I.

Prop. XVII. Theor. XVI.

Planetarum motus diurnos uniformes esse, & librationem Lune ex ipsius motu diurno oriri.

Patet per motus Legem I, & Corol. 22. Prop. LXVI. Lib. I. Quoniam verò Lunæ, circa axem suam uniformiter revolvētis, dies mensis est, hujus facies eadem ulteriorem umbilicum orbis ipsius semper respiciet, & propterea pro sita umbilici illius deviat hinc inde a Terra. Hæc est libratio in longitudinem. Nam libratio in latitudinem orta est ex inclinatione axis Lunaris ad planum orbis. Porro hæc ita se habere, ex Phænomenis manifestum est.

Prop. XVIII. Theor. XVII.

Axes Planetarum diametris quæ ad eosdem axes normaliter ducuntur minores esse.

Planetæ sublato omni motu circulari diurno figuram Sphæricam, ob æqualem undique partium gravitatem, affectare deberent. Per motum illum circularem fit ut partes ab axe recedentes juxta æquatorem ascendere conentur. Ideoque materia si fluida sit ascensu suo ad æquatorem diametros adaugebit, axem vero descensu suo ad polos diminuet. Sic Jovis diameter (contentuentibus observationibus *Cajmi* & *Flamsteadi*, brevior deprehenditur inter polos quàm ab oriente in occidentem. Eodem argumento, nisi Terra nostra

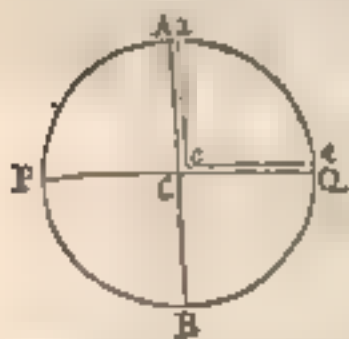
par-

paulo altior esset sub æquatore quam ad polos, Maria ad polos subsiderent, & juxta æquatorem ascendendo, ibi omnia inundarent.

Prop. XIX. Prob. II.

Invenire proportionem axis Planctæ ad diametros eadem perpendiculares.

Ad hujus Problematis solutionem requiritur computatio multiplex, quæ facilius exemplis quam præceptis addiscitur. Initio igitur calculo invenio, per Prop IV Lib I. quod vis centrifuga partium Terræ sub æquatore, ex motu diurno oriunda, sit ad vim gravitatis ut 1 ad 290. Unde si $APBQ$ figuram Terræ designet revolutione ellipticos circa axem minorem PQ genitam, sitque ACQ aqua canalis aquæ plena, à polo Qq ad centrum C , & inde ad æquatorem Aa pergens: debet pondus aquæ in canale crure AC esse ad pondus aquæ in crure altero QC ut 291 ad 290, eo quod



vis centrifuga ex circulari motu orta partem unam e ponderis partibus 291 sustinebit & detrahet, & pondus 290 in altero crure sustinebit partes reliquas. Porro (ex Propositionis XCI. Corollario secundo, Lib. I) computationem incundo, invenio quod si Terra constaret ex uniformi materia, motuque omni privaretur, & esset ejus axis PQ ad diametrum AB ut 100 ad 101: gravitas in loco Q in

Terram, foret ad gravitatem in eodem loco Q in Sphæram centro C radio PC vel QC descriptam, ut 126.7 ad 129.7. Et eodem argumentum gravitas in loco A in Sphæroidem, convolutione Ellipseos $APBQ$ circa axem AB descriptam est ad gravitatem in eodem loco A in Sphæram centro C radio AC descriptam, ut 125.7 ad 126.7. Est autem gravitas in loco A in Terram, media proportionalis inter gravitates in eadem Sphæroidem & Sphæram, propterea quod Sphæ-

Sphæra, diminuendo diametrum PQ in ratione 101 ad 100, vertitur in figuram Terræ, & hæc figura diminuendo in eadem ratione diametrum tertiam, quæ diametris duabus AP , PQ perpendicularis est, vertitur in dictam Sphæroidem, & gravitas in A , in ead. utroque, diminuitur in eadem ratione quam proxime. Est igitur gravitas in A in Sphæram centro C radio AC descriptam, ad gravitatem in A in Terram ut 126 ad 125, & gravitas in loco Q in Sphæram centro C radio QC descriptam, est ad gravitatem in loco A in Sphæram centro C radio AC descriptam, in ratione diametrorum (per Prop. LXXII. Lib. I.) id est ut 100 ad 101. Coniungantur jam hæc tres rationes, 126 ad 125, 125 ad 126 & 100 ad 101 & fiet gravitas in loco Q in Terram ad gravitatem in loco A in Terram, ut $126 \times 126 \times 100$ ad $125 \times 125 \times 101$, seu ut 501 ad 500.

Jam cum per Corol. 3. Prop. XCI. Lib. I. gravitas in canali crure utrovis $ALca$ vel $QLcq$ sit ut distantia locorum à centro Terræ si crura ista superficiibus transverſis & æquidistantibus distinguantur in partes totas proportionales, erunt pondera partium singularium in crure $ALca$ ad pondera partium totidem in crure altero, ut magnitudines & gravitates acceleratrices conjunctim, id est ut 101 ad 100 & 500 ad 501, hoc est ut 505 ad 501. Ac proinde si vis centrifuga partis cujusque in crure $ALca$ ex motu diurno orinata, sit ut ad pondus partis ejusdem ut 4 ad 505, eo ut de pondere partis cujusque, in partes 505 diviso, partes quatuor detraheret, manerent pondera in utroque crure æqualia, & propterea si iterum consideret in æqualibus. Verum vis centrifuga pars cujusque est ad pondus eandem ut 1 ad 290. Hoc est, vis centrifuga quæ deberet esse ponderis pars $\frac{1}{290}$, est tantum pars $\frac{4}{505}$, & propterea dico, secundum Regulam autem quod si vis centrifuga $\frac{4}{505}$ faciat ut altitudo aquæ in crure $ALca$ superet altitudinem aquæ in crure $QLcq$ parte centesima totius altitudinis vis centrifuga $\frac{4}{505}$ faciet ut excessus altitudinis in crure $ALca$ sit altitudinis in crure altero $QLcq$ pars tantum $\frac{1}{290}$. Est igitur diameter Terræ secundum æquatorem ad

ad ipsius diametrum per polos ut 692 ad 689. Ideoque cum Terræ semidiameter mediocris, juxta nuperam Gallorum mensuram, sit pedum Parisiensium 19615800 seu milliarium 3923 (posito quod milliare sit mensura pedum 5000,) Terra altior erit ad æquatorem quàm ad polos, excessu pedum 85200 seu milliarium 17.

Si Planeta vel major sit vel densior, minorve aut rarior quàm Terra, manente tempore periodo revolutionis diurnæ, manebit proportio vis centrifugæ ad gravitatem, & propterea manebit etiam proportio diametri inter polos ad diametrum secundum æquatorem. At si motus diurnus in ratione quacunque acceleretur vel retardetur, augebitur vel minuetur vis centrifuga in duplicata illa ratione, & propterea differentia diametrorum augebitur in eadem duplicata ratione. Unde cum Terra respectu fixarum revolvatur horis 23, 56, Jupiter autem horis 9, 56, sintque temporum quadrata ut 29 ad 5, differentia diametrorum Jovis erit ad ipsius diametrum minorem ut „ ad 1, seu 1 ad 39¹/₂. Est igitur diameter Jovis ab oriente in occidentem ducta, ad ipsius diametrum inter polos ut 40¹/₂ ad 39¹/₂ quam proximè. Hæc ita se habent ex Hypothesi quod uniformis sit Planetarum materia. Nam si materia densior sit ad centrum quàm ad circumferentiam, diameter, quæ ab oriente in occidentem ducitur, erit adhuc major.

Prop. XX. Prob. III.

Invenire & inter se comparare pondera corporum in regionibus diversi

Quoniam pondera inæqualium crurum canalis aqueæ ACQæ æqualia sunt; & pondera partium, cruribus totis proportionatum & similiter in totis sitarum, sunt ad invicem ut pondera totorum, adeoque etiam æquantur inter se, erunt pondera æqualium & in cruribus similiter sitarum partium reciproce ut crura, id est reciproce ut 692 ad 689. Et par est ratio homogeneorum & æqualium quorumvis & in eadè cruribus similiter sitorum corporum. Horum pon-

pondera sunt reciproce ut crura, id est reciproce ut distantie corporum a centro Terræ. Promde si corpora in supremis canalium partibus, siue in superfacie Terræ consistent, erunt pondera eorum ad invicem reciproce ut distantie eorum a centro. Et eodem argumento pondera, in aliis quibuscunque per totam Terræ superficiem regionibus, sunt reciproce ut distantie locorum a centro, & propterea, ex Hypothesi quod Terra Sphærica sit, dantur proportionem

Unde tale contr. Theorema, quod incrementum ponderis, per gendo ab Aequatore ad Poles, sit quam proxime ut Sinus versus Latitudinis duplicatur, vel quod perinde est ut quadratum Sinus recti Latitudinis. Exempli gratia, Latitudo *Intetæ Parisiæ* est 48 gr. 45 : Ea *Intetæ Corce* prope *Cape Verde* 14 gr. 15 : ea *Cenæ* ad *litus Guatanz* quasi 5 gr. ea locorum sub Polo 90 gr. Duplorum 97 gr. 28 gr. 10 gr. & 180 gr Sinus versî sunt 11305, 1211, 112, & 20000. Promde cum gravitas in Polo sit ad gravitatem sub Aequatore ut 691 ad 689, & excessus ille gravitatis sub Polo ad gravitatem sub Aequatore ut 3 ad 689, erit excessus gravitatis *Intetæ*, in *Intetæ Corce* & *Cenæ*, ad gravitatem sub Aequatore ut $\frac{3}{689}$, $\frac{3}{689}$ & $\frac{3}{689}$ ad 689, seu 33915, 3633, & 450 ad 13780000, & propterea gravitates totæ in his locis erunt invicem ut 13813915, 13783633, 13280456 & 13780000 Quare cum longitudines Pendulorum æquantibus temporibus oscillantibus hinc ut gravitates, & *Intetæ Parisiæ* longitudines pendulorum singulis minutis secundis oscillantis ut per unum in *Parisiam* & partem digiti longitudines Pendulorum in *Intetæ Corce*, in *Cenæ* & sub Aequatore, minutis singulis secundis oscillantium superabuntur a longitudine Penduli *Parisii* ex his $\frac{3}{689}$, $\frac{3}{689}$ & $\frac{3}{689}$ partium digiti. Hæc omnia ita se habebunt, ex Hypothesi quod Terra ex uniformi materia constet. Num materia ad centrum paulo densior ut quam ad superficiem, ex hoc sunt paulo maiores, propterea quod si materia ad centrum redandans, qua densitas ibi major reddatur, sit densior & non spectetur, gravitas in Terram reliquam uniformiter densam erit

reciprocè ut distantia ponderis à centro; in materiam verò redundantem reciprocè ut quadratum distantie à materia illa quam proxime. Gravitās igitur sub æquatore minor erit in materiam illam redundantem quam pro computo superiore, & propterea Terra ibi propter defectum gravitatis paulo altius ascendet quàm in præcedentibus definitum est. Jam verò Galli factis experimentis invenerunt quod Pendulorum minutis singulis oscillantium longitudo Parisius major sit quam in Insula Coræe, parte decima digiti, & major quam Cænne parte octava. Paulò majores sunt hæc differentie quam differentie $\frac{1}{20}$ & $\frac{1}{30}$ quæ per computationem superiorem prodire. & propterea (si crassis hæc Observationibus satis confidendum sit) Terra aliquanto altior erit sub æquatore quàm pro superiore calculo, & densior ad centrum quam in fodinis prope superficiem. Si excessus gravitatis in locis hæc Borealibus supra gravitatem ad æquatorem, experimentis majori cum diligentia institutis, accurate tandem determinetur, deinde excessus ejus ubique sumatur in ratione Sinus versæ latitudinis duplicatæ; determinabitur tam Mentura Universalis, tum Æquatio temporis per æqualia pendula in locis diversis indicari, tum etiam proportio diametrorum Terræ ac densitas ejus ad centrum, ex Hypothesi quod densitas illa, pergendo ad circumferentiam, uniformiter decreseat. Quæ quidem Hypothesis, licet accurata non sit, ad incundam tamen calculum assumi potest.

Prop. XXI. Theor. XVIII.

Puncta Æquinoctialia regredi, & axem Terræ singulis revolutionibus nutando seu nutanti in Ellipticam & ibi redire ad positionem priorem.

Patet per Corol. 20. Prop. LXVI. Lib. I. Motus tamen iste nutandi perexiguus esse debet, & vix aut ne vix quidem sensibilis.

Prop. XXII. Theor. XIX.

Motus omnes Lunares, omnesque motuum inaequalitates ex allatis Principiis consequi.

Planetas maiores, interea dum circa Solem feruntur, posse alios minores circum se revolvētes Planetas deterre, & minores illos in Ellipsis, umbilicos in centris majorum habentibus, revolvī debere patet per Prop. LXV. Lib. I. Actione autem Solis perturbabuntur eorum motus multimode, utque adhaerentur inaequalitatibus quae in Luna nostra notantur. Hae utique (per Corol. 2, 3, 4, & 5 Prop. LXVI) velocius movetur, ac radio ad Terram ducto describit arcum pro tempore majorem, orbemque habet minus curvam, atque adeo propius accedit ad Terram, in Syzygiis quam in Quadraturis, nisi quatenus impedit motus Excentricitatis. Excentricitas enim maxima est (per Corol. 9. Prop. LXVI) ubi Apogaeum Lunae in Syzygiis versatur, & minima ubi idem in Quadraturis consistit, & inde Luna in Perigaeo velocior est & nobis propior, in Apogaeo autem tardior & remotior in Syzygiis quam in Quadraturis. Progreditur insuper Apogaeum, & regrediuntur Nodi, sed motu inaequali. Et Apogaeum quidem (per Corol. 7 & 8 Prop. LXVI) velocius progreditur in Syzygiis suis, tardius regreditur in Quadraturis, & excessu progreſſus supra regressum aequatum fertur in consequentia. Nodi autem (per Corol. 11. Prop. LXVI) quiescent in Syzygiis suis, & velocissime regrediuntur in Quadraturis. Sed & major est Lunae latitudo maxima in ipsis Quadraturis (per Corol. 10. Prop. LXVI.) quam in Syzygiis & motus medius velocior in Perihelio Terrae (per Corol. 6. Prop. LXVI) quam in Aphelio. Aequae hae sunt inaequalitates insigniores ab Astronomis notatae.

Sunt etiam aliae quaedam nondum observatae inaequalitates, quibus motus Lunares adeo perturbantur, ut nulla hactenus lege ad regulam

g. lam aliquam certam reduci poterint. Velocitates enim seu motus horum Apogæi & Nodorum Lunæ, & eorundem æquationes, ut & differentia inter excentricitatem maximam in Syzygiis & minimam in Quadraturis, & inæqualitas quæ Variatio dicitur, augentur ac diminuantur annuatim (per Corol. 14. Prop. LXVI.) in triplicata ratione diametri apparentis Solaris. Et Variatio præterea augetur vel diminuitur in duplicata ratione temporis inter quadraturas quam proxime, per Corol. 1 & 2. Lem. X. & Corol. 16. Prop. LXVI. L. b. I.) Sed hæc inæqualitas in calculo Astronomico, ad Prostaphæresin Lunæ refertur solet, & cum ea confundi.

Prop. XXIII. Prob. IV.

*Motus inæquales Satellitum Jovis & Saturni a motibus
Lunaribus derivare.*

Ex motibus Lunæ nostræ motus analogi Lunarum seu Satellitum Jovis sic derivantur. Motus medius Nodorum Satellitis exterioris Jovialis est ad motum medium Nodorum Lunæ nostræ, in ratione composita ex ratione duplicata temporis periodici Terræ circa Solem ad tempus periodicum Jovis circa Solem, & ratione simplici temporis periodici Satellitis circa Jovem ad tempus periodicum Jovis circa Solem, & ratione simplici temporis periodici Satellitis circa Jovem ad tempus periodicum Lunæ circa Terram. (per Corol. 16. Prop. LXVI.) adeoque annis centum conficit Nodus iste 9 gr. 34. in antecedentia. Motus medii Nodorum Satellitum interiorum lunæ ad motum hujus, ut illorum tempora periodica ad tempus periodicum hujus, per idem Corollarium, & inde dantur. Motus autem Angis Satellitis cujusque in consequentia est ad motum Nodorum ipsius in antecedentia ut motus Apogæi Lunæ nostræ ad huius motum Nodorum (per idem Corol.) & inde datur. Diminuta tamen debet motus Angis sic inventus in ratione 3 ad 9 vel 1 ad 2 circiter, ob causam quam hic exponere non vacat.

Æqua-

Equationes maximæ Nodorum & Augis Satellitis cuiusque fere sunt ad æquationes maximas Nodorum & Augis Lunæ respectivè, ut motus Nodorum & Augis Satellitum, tempore unius revolutionis æquationum priorum, ad motus Nodorum & Apogæi Lunæ tempore unius revolutionis æquationum posteriorum. Variatio Satellitis à Jove spectati, est ad Variationem Lunæ ut sunt toti motus Nodorum temporibus periodicis Satellitis & Lunæ ad invicem, per idem Corollarium, adeoque in Satellite extremo non superat $6^{\circ} 22''$. Parvitate harum inæqualitatum & tarditate motuum fit ut motus Satellitum lumine regulares reperiantur, utque Astronomi recentiores aut motum omnem Nodis denegent, aut asserant tardissime retrogradum. Nam *Hannibaldus* collatis suis cum *Cassini* Observationibus Nodos tarde regredi apprehendit.

Prop. XXIV. Theor. XX.

Fluxum & refluxum Maris ab actionibus Solis ac Lunæ oriri libere.

Mare singulis diebus tam Lunaribus quam Solaribus bis intumescere debere ac bis defluere patet per Corol. 19. Prop. LXVI. Lib. I. ut & aquæ maximam altitudinem, in maribus profundis & liberis, appellum Luminarium ad Meridianum loci minori quam sex horarum spatio sequi, uti fit in Maris *Atlantici* & *Æthiopici* tractu toto orientali inter *Casiliam* & Promontorium *Bonæ Spei*, ut & in Maris *Pacifici* litore *Chilensi* & *Peruviano*: in quibus omnibus littoribus æstus in horam circiter tertiam incipit, nisi ubi motus per loca vadiosa propagatus aliquantulum retardatur. Horas numero ab appulsiu Luminaris utriusque ad Meridianum loci, tam infra Horizontem quam supra, & per horas diei Lunaris intelligo viginti quartas partes temporis quo Luna motu apparente diurno ad Meridianum loci revolvitur.

Motus autem hi, quos Luminaria duo excitant, non cernuntur distincte, sed motum quendam mixtum efficiunt. In Luminariam
Con-

Coniunctione vel Oppositione conjungentur eorum effectus, & componetur fluxus & refluxus maximus. In Quadraturis Sol attollet aquam ubi Luna deprimat, deprimetque ubi Sol attollet, & ex effectuum differentia æstus omnium minimus orietur. Et quoniam, experientia teste, major est effectus Lunæ quam Solis, incidet aquæ maxima altitudo in horam tertiam Lunarem. Extra Syzygias & Quadraturas, æstus maximus qui sola vi Lunari incidere temper deberet in horam tertiam Lunarem, & sola Solari in tertiam Solarem, compositis viribus incidet in tempus aliquod intermedium quod tertiæ Lunari propinquius est, adeoque in transitu Lunæ a Syzygiis ad Quadraturas, ubi hora tertia Solaris præcedat tertiam Lunarem, maxima aquæ altitudo præcedet etiam tertiam Lunarem, idque maximo intervallo paulo post Octantes Lunæ, & paribus intervalis æstus maximus sequetur horam tertiam Lunarem in transitu Lunæ a Quadraturis ad Syzygias. Hæc ita sunt in mari aperto. Nam in ostiis Fluviorum fluxus majores cæteris partibus tardius ad æquum veniunt.

Pendent autem effectus Luminarium ex eorum distantia a Terra. In minoribus enim distantis majores sunt eorum effectus, in majoribus minores, idque in triplicata ratione diametrorum apparentiam. Igaur Sol tempore hyberno, in Perigæo existens, majores edit effectus, efficiuntque ut æstus in Syzygiis paulo majores sint, & in Quadraturis paulo minores (cæteris paribus) quam tempore æstivo, & Luna in Perigæo singulis mensibus majores ciet æstus quam ante vel post dies quindecim, ubi in Apogæo versatur. Unde fit ut æstus duo omnino maximi in Syzygiis continuus se mutuo non sequantur.

Pendet etiam effectus utriusque Luminaris ex ipsius Declinatione seu distantia ab Aequatore. Nam si Luminare in polo constitueretur traheret illud singulas aquæ partes constanter, absque actionis intermissione & remissione, adeoque nullam motus reciprocationem crearet. Igaur Luminar a recedendo ab æquatore polam versus effectus suos gradatim amittent, & propterea minores erunt æstus

revolutione diurna loci cursum, *F*, affluxus erit maximus in *F*, hora tertia post appam Lunæ ad Meridianum supra Horizontem, postea defluxus maximus in *Q* hora tertia post occasum Lunæ, dein affluxus maximus in *f* hora tertia post appulsam Lunæ ad Meridianum intra Horizontem, ultimo defluxus maximus in *Q* hora tertia post ortum Lunæ & affluxus posterior in *f* erit minor quam affluxus prior in *F*. Distinguitur enim Mare totum in duos omnino fluctus Hemisphaericos, unum in Hemisphaerio *K H k C* ad Boream vergentem alterum in Hæmi. pæno opposito *K h k C*, quos gignit fluctum Borealem & fluctum Australem nominare licet. Hi fluctus semper fieri nuntio oppositi veniunt per vias ad Meridianos locorum singulorum interposita intervallo horarum Lunarium duodecim. Cuiusque regiones Boreale magis participant fluctum Borealem, & Australem magis Australem, inde oriuntur ælius alternis vicibus maiores & minores, in locis triangularibus extra æquatorem. Ælius autem maior, Luna in vertice loci declinante, incidet in horam sextam tertiam post appam Lunæ ad Meridianum supra Horizontem, & una declinationem mutante vertetur in minorem. Et fluctum eundem circa maximam exaltet in tempora Solstitiorum præteritum futuræ. Nodus ascendens vertatur in principio Aëris. Sic experientia compertum est quod ælius marium tempore hyberno temperent vesperinos & vespertini tempore æstivo matutinos, ad Pyramum quidem in Arabia quod peccis unius, ad *Brastoliam* vero aliter quædam rationem. Observantibus *Co. de. 10. de. Sæculo.*

Motus autem ætenuis decepti mutantur æquantulum per viam reciprocationis æquarum, quæ Maris ælius etiam cessantibus humilitatibus actionibus, posset aliquandiu perleverare. Contra vero hæc motus impredimantur differentiam ætenuis alternorum, & ælius proxime post Syzygas maiores reddat, cuiusque proxime post Quadraturas minuat. Unde fit ut ælius ætenuis ad *Phænionem* & *Brastoliam* non multo magis differant ab invicem quam ætenuis præteritis vel ætenuis quinquaginta, æquæ ælius omni in ætenuis in mare porcus non nisi perit a Syzygis sed tertiis. Retardantur

tur etiam motus omnes in transitu per vada, adeo ut aestus omnium maximus, in fretis quibusdam & Fluxionum ostiis, sint quarti vel etiam quinti à Syzygiis.

Porto fieri potest ut aestus propagetur ab Oceano per freta diversa ad eundem portum, & citius transeat per alia freta quam per alia, quo in eadem aestus idem, in duos vel plures successive advenientes diversis, componere possit motus novos diversorum generum. Imaginamus aestus duos aequales a diversis locis in eundem portum venire, quorum prior precedat alterum ipso intervallo sex, indicatque in eadem tertiam ab appulsu Lunae ad Meridiam portus. Si Luna in horae suo ad Meridiam apparet vel ibi fiat in aequatore, venient singulis horis tenus aequales affluxus, qui in modum reflexus incidendo eodem affluxibus aequabuntur, & in ipso eadem illas effluent ut aqua tranquille stagnet. Si Luna tunc declinabat ab Aequatore, hinc aestus in Oceano vicinis alteris maioribus & minoribus, uti dictum est, & inde propagabuntur in hunc portum affluxus binii majores & binii minores, vicibus alternis. Affluxus autem binii majores componere aquam altissimam in medio portus utrumque, affluxus maior & minor faciet ut aqua ascendat ad eandem altitudinem in Medio portum, & inter. Pius binii minores aqua ascendet ad altitudinem minorem. Si portus vicinior quatuor horarum, aqua non bis ita heret, sed semel tantum perveniet ad maximam altitudinem & semel ad minorem, & a medio maxima si Luna declinat in portum supra Horizontem, incidet in quartam vel sextam vel octavam ab appulsu Lunae ad Meridiam, atque Luna declinationem mutante in eandem directionem. Quorum omnium exemplum, in portu totius Indiarum ad Bassam, 160 latitudine Boreali 20 gr. 30 min. Perinde Nativum Observationibus patere. Ibi aqua de transitu in Luna per Aequatorem sequente stagnat, dein Luna ad Boream declinans incipit fluere & refluere, non bis, ut in alio portu, sed semel singulis diebus, & aestus tunc in Oceano vicinis altissimis maximus in ortum. Cum Luna declinationem egerit in altitudinem quendam

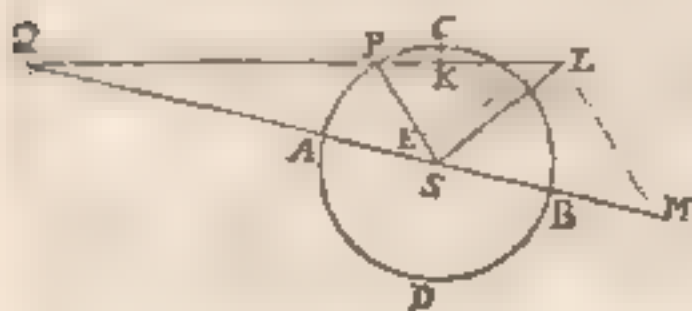
dem septimum vel octavum, dein per alios septem dies eundem gradibus decrevit, quibus antea creverat, & Lunā declinationem mutante cellat, ac mox mutatur in defluxum. Incidit enim subinde deflexus in occasum Lunæ & affluxus in ortum, donec Luna ætatem mutat declinationem. Aditus ad hunc portum fretaque vicina complex patet, alter ab Oceano *Suenfi* inter Continentem & Insulam *Laponiam*, alter a Mari *Indico* inter Continentem & Insulam *Borneo*. A restis spatio horarum duodecim a Mari *Indico*, & spatio horarum sex a Mari *Suenfi* per freta illa venientes, & sic in horam tertiam & nonam Lunarem incidentes, componant huiusmodi motus, sive ab Marium illorum conditio, observationibus vicinorum littorum determinandum relinquo.

Hactenus causas motuum Lunæ & Marium reddidi. De quantitate motuum jam convenit aliqua subjungere

Prop. XXV. Prob. V

breve &c. Solis ad perturbandos motus Luna

Designet *Q* Solem, *S* Terram, *P* Lunam, *PADB* orbem Lunæ. In *QP* capiatur *QK* æqualis *QS*, sitque *QL* ad *QK*



in duplicata ratione *QK* ad *QP*, & ipsi *PS* agatur parallela *LM*; & si gravitas acceleratrix Terræ in Solem exponatur per distantiam *QS* vel *QK*, erit *QL* gravitas ac-

celeratrix Lunæ in Solem. Ea componitur ex partibus *QM*, *LM*, quarum *LM* & ipsius *QM* pars *SM* perturbat motum Lunæ, ut in Libri primi Prop. LXVI. & ejus Corollaris expositum est.

Qua-

Quatenus Terra & Luna circum commune gravitatis centrum revolvuntur, perturbabitur motus Terræ circa centrum illud a viribus consimilibus, sed summas tam virium quam motuum referre licet ad Lunam, & summas virium per lineas ipsis analogas SM & ML designare. Vis ML (in medioem sua quantitate) est ad vim gravitatis, qua Luna in orbe suo circa Terram quiescentem ad distantiam PS revolvî posset, in duplicata ratione temporum periodicorum Lunæ circa Terram & Terræ circa Solem, (per Corol. 17. Prop. LXVI. Lib. I.) hoc est in duplicata ratione dierum 27 hor. 7. min. 43. ad dies 365. hor. 6. min. 9. id est ut 1000 ad 178725, seu 1 ad 178 $\frac{1}{2}$. Vis qua Luna in orbe suo circa Terram quiescentem, ad distantiam PS semidiametrorum terrestrium 60, revolvî posset, est ad vim, qua eodem tempore ad distantiam semidiametrorum 60 revolvî posset, ut 60' ad 60, & igitur vis ad vim gravitatis apud nos ut 1 ad 60 x 60. Ideoque vis medioem ML est ad vim gravitatis in superficie Terræ, ut 1 x 60' ad 60 x 60 x 60 x 178 $\frac{1}{2}$, seu 1 ad 638092 $\frac{1}{2}$. Unde ex proportione linearum SM , ML , datur etiam vis SM . & hæc sunt vires Solis quibus motus Lunæ perturbantur. *Q. E. I.*

Prop. XXVI. Prob. VI.

Intemne incrementum areæ quam Luna radio ad Terram ducto describit.

Diximus aream, quam Luna radio ad Terram ducto describit, esse tempore proportionalem, nisi quatenus motus Lunaris ab actione Solis turbatur. Inæqualitatem momenti (vel incrementi) horum, hic investigandam proponimus. Ut computatio facilior reddatur, fingamus orbem Lunæ circularem esse, & inæqualitates omnes negligamus, ea sola excepta, de qua hæc agitur. Ob ingentem vero Solis distantiam ponamus etiam lineas QP , QS sibi invicem parallelas esse. Hoc pacto vis LM reducetur semper ad medioem

summa omnium virium EL tempore toto CP impressarum in Lu-
 nam, atque adeo etiam ut velocitas hac summa genita, id est, ut
 acceleratio descriptionis areæ $CS P$, seu incrementum momenti. Vis
 qua Luna circa Terram quiescentem ad distantiam SP , tempore
 suo periodico $CADBC$ dictum 27. hor 7. min. 43. revolvitur posset,
 efficere ut corpus, tempore CS cadendo, describeret longitudinem
 CS , & velocitatem simul acquireret æqualem velocitati, qua Lu-
 na in orbe suo movetur. Patet hoc per Schol. Prop. IV. Lib. I.
 Cum autem perpendicularum Kd in SP demum sit ipse EL
 pars tertia, & ipse SP seu ML in octantibus pars dimidia, vis
 EL in Octantibus, ubi maxima est, superabit vim ML in ratione
 3 ad 2, adeoque erit ad vim illam, qua Luna tempore suo periodico
 circa Terram quiescentem revolvitur posset, ut 100 ad 11915, seu
 11915, & tempore CS velocitatem generare deberet quæ est pars
 tertia velocitatis Lunaræ, tempore autem CPA velocitatem mayo-
 rem generaret in ratione CA ad CS seu SP . Exponatur vis maxi-
 ma EL in Octantibus per aream $FAK \times AK$ rectangulo $SP \times PP$
 æqualem. Et velocitas, quam vis maxima tempore quovis P genera-
 re posset, erit ad velocitatem quam vis omnis minor EL eodem tem-
 pore generat ut rectangulum $SP \times CP$ ad aream AKG tempore
 autem toto CPA velocitates generæ erunt ad invicem ut rectangulum
 $SP \times CA$ & triangulum SCG , sive ut areæ quadrantis CSA ad
 rectangulum SP . Ideoque (per Prop. IX. Lib. V. I. en) velocitas po-
 sterior, toto tempore genita, erit pars tertia velocitatis Lunaræ. Hæc
 Lunaræ velocitati, quæ areæ momento medio æqualis est, adda-
 tur & auferatur quadranti velocitatis alterius, & si momento me-
 dio cre exponatur per numerum 11915 summa 11915 + 50 seu
 11965 ex æquæ momentam maximum areæ in $Sxyz$ & d , &
 differentia 11915 - 50 seu 11865 ex æquæ momentam minimum
 in Quadrante S . Igitar areæ temporibus æquæ in $Sxyz$ & d
 Quadrantibus decripæ, sunt ad invicem ut 11965 ad 11865. Ad
 momentum maximum 11865 addatur momentam, quæ est summa
 momentorum differentiam 100 ut ita pariam $FKCC$ ad utrumque
 summa
 11965
 11965

SCG (vel quod perinde est, ut quadratum Sinus $P\ K$ ad quadratum Radu $S\ P$, id est ut $P\ d$ ad $S\ P$) & summa exhibebit momentum areæ, ubi Luna est in loco quovis intermedio P .

Hæc omnia ita se habent, ex Hypothesi quod Sol & Terra quiescunt, & Luna tempore Synodico dierum 27. hor. 7. min. 43 revolvitur. Cum autem periodus Synodica Lunarum verè sit dierum 29 hor. 12. & min 44 augeri debent momentorum incrementa in ratione temporis. Hoc pacto incrementum totum, quod erat pars momenti mediocritatis, jam fiet ejusdem pars $\frac{100}{103}$. Ideoque momentum areæ in Quadratura Lunæ erit ad ejus momentum in Syzygia ut 11023 — 50 ad 11023 + 50, seu 10973 ad 11073, & ad ejus momentum, ubi Luna in alio quovis loco intermedio P versatur, ut 10973 ad 10973 + $P\ d$, existente videlicet $S\ P$ æquali 100.

Areæ igitur, quam Luna radio ad Terram ducto singulis temporis particulis æqualibus describit, est quam proxime ut summa numeri 119. & Sinus versu duplicatæ distantiae Lunæ a Quadratura proxima, in circulo cujus radius est unitas. Hæc ita se habent ubi Variatio in Octantibus est magnitudinis mediocritatis. Sin Variatio ibi major sit vel minor, augeri debet vel minus Sinus ille versus in eadem ratione.

Prop. XXVII. Prob. VII.

Ex motu horario Lunæ in centro ipsius distantiam a Terra.

Areæ, quam Luna radio ad Terram ducto, singulis temporis momentis, describit, est ut motus horarius Lunæ & quadratum distantiae Lunæ à Terrâ conjunctim; & propterea distantia Lunæ à Terrâ est in ratione compositâ ex dimidiatâ ratione Areæ directæ & dimidiatâ ratione motus horarii inverse. *Q. E. I.*

Carol. 1. Hinc datur Lunæ diameter apprensus: quippe quæ sit reciproce ut ipsius distantia a Terra. Tentent Astronomi quam probè hæc Regula cum Phænomenis congruat.

Carol.

Corol. 2. Hinc etiam Orbis Lunaris accuratius ex Phænomenis quam antehac definiti potest.

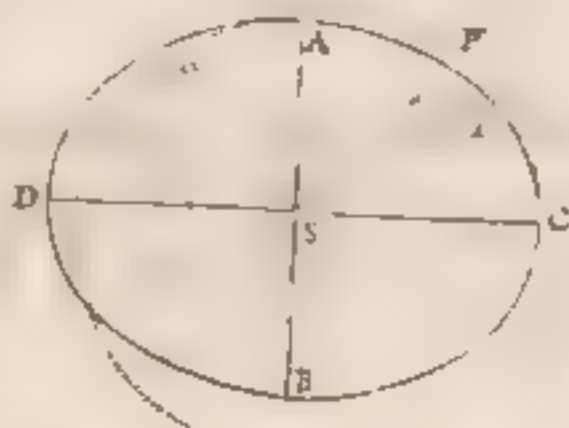
Prop. XXVIII. Prob. VIII.

Invenire diametros Orbis in quo Luna absque excentricitate moveri deberet.

Curvatura Trajectoriae, quam mobile, si secundum Trajectoriae illius perpendicularum trahatur, describit, est ut attractio directe & quadratum velocitatis inverse. Curvaturas linearum pono esse inter se in ultima proportionem Sinuum vel Tangentium angulorum contactuum ad radios aequales, ubi radii in infinitum diminuuntur. Attractio autem Lunæ in Terram in Syzygiis est excellens gravitatis ipsius in Terram supra vim Solarem 2 P K (Vide Figur. pag. 434.) qua gravitas acceleratrix Lunæ in Solem superat gravitatem acceleratricem Ter-

ræ in Solem. In Quadraturis autem attractio illa est summa gravitatis Lunæ in Terram & vis Solaris K S, qua Luna in Terram trahitur. Et hæ attractiones, si $AS + CS$ dicatur N, sunt ut $\frac{178725}{AS^2} - \frac{1000}{CS \times N}$ & $\frac{1-4-15}{CS^2} + \frac{1000}{AS \times N}$ quam proxime, seu ut 178725 N in CS q. - 2000 AS q. in CS, & 178725 N in AS q. + 1000 CS q. x AS. Nam

si gravitas acceleratrix Terræ in Solem exponatur per numerum 178725, vis mediocris ML, quæ in Quadraturis est PS vel



vel SK & Lunam tranſit in Terram, erit 1000, & viſ me-
 diocris DM in Syzygiis erit 3000, de qua, ſi viſ mediocris
 ML ſubducatur, manebit viſ 2000 qua Luna in Syzygiis diſtrahi-
 tur. Terra, quicunque jam ante notum navi $2PK$. Velocitas au-
 tem Lunæ in Syzygiis AN ſcilicet ad ipſius velocitatem in Quadra-
 turis C & D ut CS , ad AD & momentam arcæ quam Luna radio
 ad Terram dicto deſcribit in Syzygiis ad momen- tum ejuldem arcæ
 in Quadraturis conjunctam, id eſt ut 11073 CS ad 10973 AS
 ſimiliter & ratio his inverse & ratio prior ſemel directe, & fiet
 Curvatura Orbis Lunaris in Syzygiis ad ejuldem Curvaturam in
 Quadraturis ut 120407 x 178-25 AD q. x CS q. x N = 120407
 x 2000 AD q. x CS ad 122611 x 178-25 AD q. x CS q. x N +
 122611 x 1000 CS q. x AD , id eſt ut 2131969 AD x CS x N =
 24081 AS cub. ad 21913-1 AD x CS x N + 12261 CS cub.

Quoniam figura orbis Lunaris ignoratur, huius vice aſſumamus
 Ellipſin $DECA$, in cuius centro D Terra collocetur, & cuius axis
 maior DE Quadratura, minor AB Syzygiis interſequetur. Cum au-
 tem partem Ellipſis huius motu angulari circa Terram revolu-
 tur, & Trajectoria, cuius Curvaturam conſideramus, de eorū de-
 bet in plano quod motu omni angulari omnino deſcribitur, con-
 ſideranda eſt figura, quam Luna in Ellipſi ſua revolvendo deſcri-
 bit in hoc plano, hoc eſt Ellipſis CPA , cuius puncta ſingula P ſuc-
 ceſſive capiendū punctum quodvis P in Ellipſi, quod locum Lunæ
 repræſentet, & capiendū SP æqualem SP , ea eſt Ellipſis CPA
 æqualem SP ſic motu apparenti deſcribit a tempore Quadraturæ C conſecto,
 ut quod eodem tempore deſcribitur ut angulus CSA ſit ad angulum CSA
 ut tempus revolutionis Synodice Lunaris ad tempus revolutionis
 Periodice æquale 29 d. 12 h. 44, ad 27 d. 7 h. 43. Capiatur igitur
 angulus CSA in eadem ratione ad angulum rectum CSA , & he-
 ritur arcus SA æqualem longum SA , & eſt Apſidalia & Ap-
 ſidalia minoris orbis ſcilicet CPA . Rationes ſunt inveniendæ quod
 eſt differentia inter Curvaturam orbis CPA in vertice A , & Curvaturam
 circuli centro S intervallo SA deſcripti, ſcilicet ad differentiam inter
 curvaturam

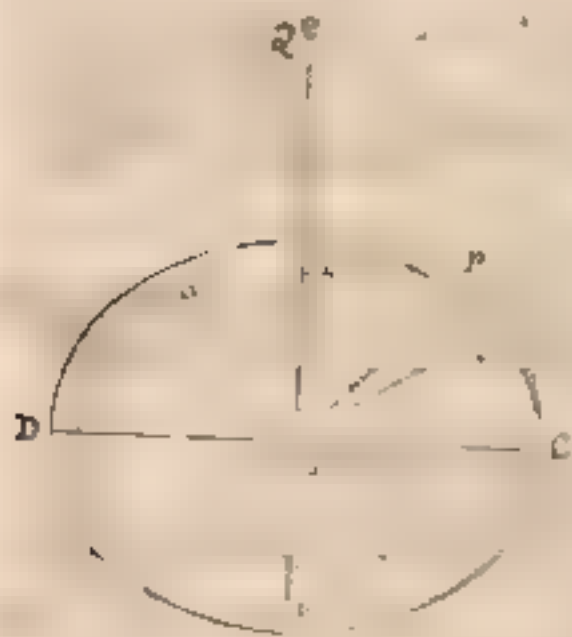
curvaturam Ellipseos in vertice A & curvaturam ejusdem circuli in duplicata ratione anguli $CS P$ ad angulum $CS p$, & quod curvatura Ellipseos in A sit ad curvaturam circuli illius in duplicata ratione SA ad SC , & curvatura circuli illius ad curvaturam circuli centro S intervallo SC descripti ut SC ad SA , hanc autem curvatura ad curvaturam Ellipseos in C in duplicata ratione SA ad SC , & differentia inter curvaturam Ellipseos in vertice C & curvaturam circuli novissimi, ad differentiam inter curvaturam figuræ Spa in vertice C & curvaturam ejusdem circuli, in duplicata ratione anguli $CS P$ ad angulum $CS p$. Quæ quidem rationes ex sinibus angulorum contactus ac differentiarum angulorum facile colliguntur. Collatis autem his rationibus inter se, prodit curvatura figuræ Cpa in a ad ipsius curvaturam in C , ut $AS \text{ cub.} + \frac{1}{2} CS^2$ x AS ad $CS \text{ cub.} + \frac{1}{2} AS^2$ x CS . Ubi numerus $\frac{1}{2}$ designat differentiam quadratorum angulorum $CS P$ & $CS p$ applicatam ad Quadratum anguli minoris $CS P$, seu (quod perinde est) differentiam Quadratorum temporum 27 d. 7 h. 43, & 29 d. 12 h. 44, applicatam ad Quadratum temporis 27 d. 7 h. 43.

Igitur cum a designet Syzygiam Lunæ, & C ipsius Quadraturam, proportio jam inventa eadem esse debet cum proportione curvaturæ Orbis Lunæ in Syzygiis ad ejusdem curvaturam in Quadraturis quam supra invenimus. Proinde ut invenatur proportio CS ad AS , dico extrema & media in se invicem. Ex terminis prodeunt es ad AS x CS applicati, hanc 2062,77 CS ff. — 213.9'9 N x $CS \text{ cub.} + 368682$ N x AS x CS^2 + 36342 AS^2 x CS^2 — 362046 N x AS^2 x CS + 2191371 N x $AS \text{ cub.} + 4031,2$ AS ff. = 0. Hic pro terminorum AS & CS semidiametris N scribo 1, & pro eorundem semidifferentia ponendo x , fit $CS = 1 + x$, & $AS = 1 - x$. quibus in æquatione scriptæ, & æquatione procedente resoluta, obtinetur x æqualis 0,002236 & inde semidiameter CS fit 1,0022, & semidiameter AS 0,99776 quæ numeri sunt a 69 & 68'', quam proxime. Est igitur distantia Lunæ a Terra in Syzygiis ad ipsius distantiam in Quadraturis (reposita & acceper excentricitatis consideratione) ut 68 ad 69, vel numeris rotundis ut 69 ad 70.

Prop. XXIX. Prob. IX.

Invenire Variationem Lunæ.

Oritur hæc inæqualitas partim ex forma Elliptica orbis Lunaris, partim ex inæqualitate momentorum areæ, quam Luna radio ad Terram ducto describit. Si Luna P in Ellipti $DBCA$ circa Terram in centro Ellipseos quiescentem moveretur, & radio SP ad Terram ducto describeret aream $CS P$ tempori proportionalem,



esset autem Ellipseos semidiameter maxima CS ad semidiameter minimumam SA ut $69''$ ad $68''$ foret Tangens anguli $CS P$ ad Tangentem anguli motus medi d quadratura C computat, ut Ellipseos semidiameter SA ad eandem semidiameter SC seu $68''$ ad $69''$. Debet autem descriptio areæ $CS P$, in progressu Lunæ a Quadratura ad Syzygiam, ea ratione accelerari, ut ejus momentum in Syzygia Lunæ sit ad ejus momentum in Quadratura ut 11073 ad 10973 , utq; ex-

cessus momenti in loco quovis intermedio P supra momentum in Quadratura sit ut quadratum Sinus anguli $CS P$. Id quod fiet accutius fiet, si tangens anguli $CS P$ dividatur in dimidiatâ ratione numeri 10973 ad numerum 11073 , id est in ratione numeri 68 ad numerum 68 . Quæ pacto tangens anguli $CS P$ amittit ad tangentem motus medi ut 68 ad 67 , & angulus $CS P$

in

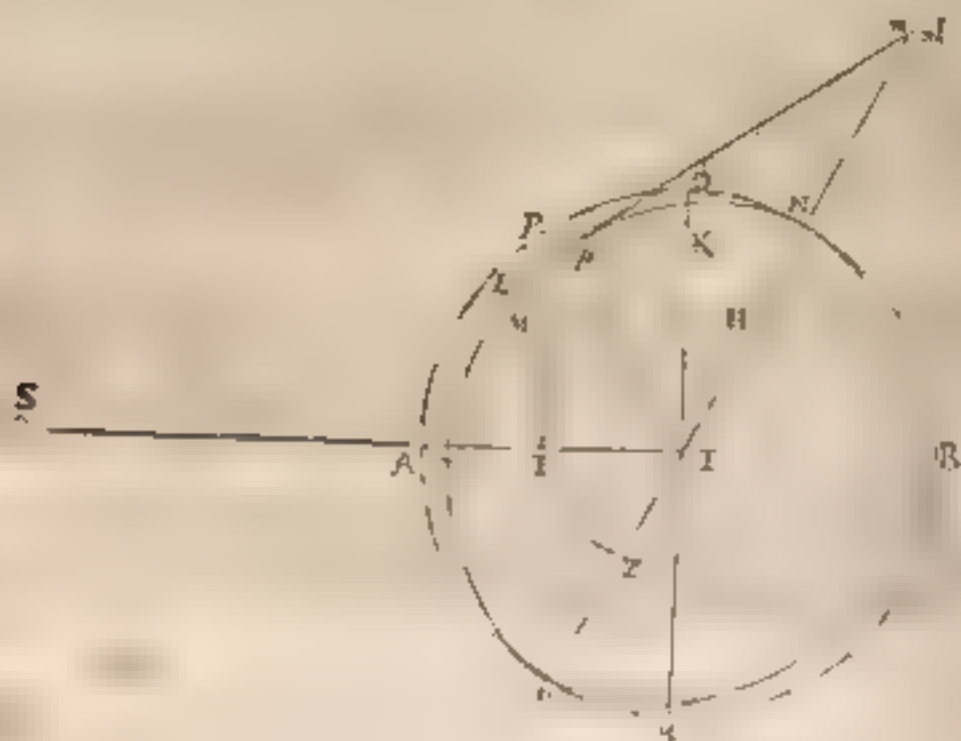
in Octantibus, ubi motus medius est $45^{\circ} 57'$ invenietur $44^{\circ} 57' 29''$ qui subductus de angulo motus medii $45^{\circ} 57'$ relinquit Variationem $32' 31''$. Hæc ita se haberent in Luna, perendo a Quadratura ad Syzygiam, describeret angulum $\angle S A$ graduum tantum non ultra. Verum ob motum Terræ, quo Sol in antecedente via motu apparente tranfertur, Luna, priusquam Solem allequitur, detrahatur ab $\angle S A$ angulo recto maiorem in ratione revolutionis Lunaræ Synodica ad revolutionem periodicam, id est in ratione $29 d. 12 h. 44'$ ad $27 d. 7 h. 43'$. Et hoc pacto anguli omnes circa centrum Solis latantur in eadem ratione, & Variatio quæ facta esset $32' 31''$ iam aucta in eadem ratione, fit $35. 9$. Hæc ab Astronomis constat 40 , & ex recentioribus Observationibus 38 . Hæc autem recentissime deprehendit esse 38 in Octantibus veritas oppositionem Solis, & 32 in Octantibus Solem veris. Unde ne diuersus eius magnitudo erit 35 quæ cum magnitudine a nobis inventa $35. 9$ probe congruit. Magnitudinem enim maiorem non computavimus, neglectis differentiis, quæ a curvatura Orbis magni, maiorque Solis actione in Lunam scalcitam & novam quàm in Globulam & plenam, eriri possint.

Prop. XXX. Prob. X.

Invenire motum horarium Nodorum Lunæ in Orbe

Designet S Solem, T Terram, P Lunam, $N P n$ Orbem Lunæ, $A p n$ vestigium Orbis in plano Eclipticæ, N, n Nodos, $n I N m$ lineam Nodorum intrinsece productam, $P I, P K$, perpendicularia demissa in lineas $S I, Q q$, $P p$ perpendicularum demissum in planum Eclipticæ; Q, q Quadraturæ Lunæ in plano Eclipticæ & $p K$ perpendicularum in lineam $Q q$ Quadraturæ intrajacentem. Et vis Solis ad perturbandum motum Lunæ (per Prop. XXV) duplex erit, altera lineæ $2 I T$ vel $2 K p$, altera lineæ $P I$ proportionalis. Et Luna vi priore in Solem, posteriore in lineam $S I$ trahitur.

Componitur autem vis posterior PI ex visibus IT & PT , quarum PT agit secundum planam orbis Lunaris, & propterea situm plani nil mutat. Hæc igitur negligenda est. Vis autem II cum vi $\propto II$ componit vim totam $\propto IT$, qua planum Orbis Lunaris perturbatur. Et hæc vis per Prop. XXV. est ad vim qua Luna in



circulo circa Terram quiescentem tempore suo periodico revolvi posset, ut $\propto IT$ ad Radium circuli multiplicatum per numerum 178, 125, live ut IT ad Radium multiplicatum per 59, 574. Ceterum in hoc calculo & eo omni qui sequitur, considero lineas omnes a Luna ad Solem ductas tanquam parallelas lineæ quæ a Terra ad Solem ducitur, propterea quod inclinatio tantum tere minuit effectus omnes in aliquibus casibus, quantum auget in aliis, & Notorum motus mediocres quærimus, neglectis illiusmodi minutis, quæ calculum nimis impeditum redderent.

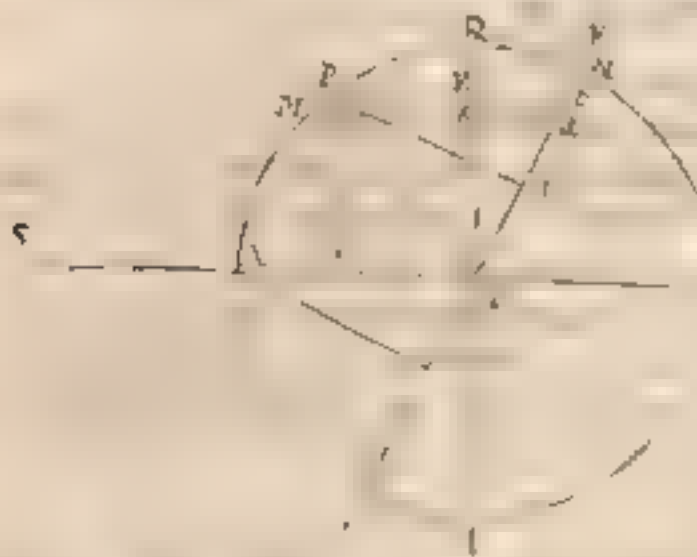
Designet iam P Marcum, quem Luna dato tempore quam minimo describit, & ML lineolam quam Luna, impellente vi præfata IT , eodem tempore describere posset. Jungantur PL , MP , & producantur ex ad m & t , ubi secant planum Eclipticæ, inque Tm demittatur perpendicularum PH . Et quoniam ML paralela est ipsi ST , si ml paralela sit ipsi ML , erit ml in plano Eclipticæ, & contra. Ergo ml , cum sit in plano Eclipticæ, paralela erit ipsi ML , & similia erunt triangula LMP , Lmp . Jam cum MPm sit in plano Orbis, in quo Luna in loco P movebatur, incidet punctum m in lineam Nn per Orbis illius Nodos N, n , ductam. Et quoniam vis qua lineola LM generatur, si tota simul & semel in loco P impetitia esset, efficeret ut Luna moveretur in arcu, cujus Chorda esset LP , atque adeo transferret Lunam de plano $MPmT$ in planum $LPII$, motus Nodorum à vi illa generatus æquus erit angulo mTi . Est autem ml ad mP ut ML ad MP , adeoque cum MP ob datum tempus data sit, est ml ut rectangulum $ML \times mP$, id est ut rectangulum $II \times nP$. Et angulus mTi , si modo angulus Tmi rectus sit, est ut $\frac{m}{Tm}$, & propterea ut $\frac{II \times nP}{Tm}$ id est (ob proportionales Tm & mP , TP & PH) ut $\frac{II \times PH}{Tm}$, adeoque ob datam TP , ut $IT \times PH$. Quod si angulus Tmi , seu STN obliquus sit, erit angulus mTi adhuc minor, in ratione Sinus anguli STN ad Radium. Est igitur velocitas Nodorum ut $IT \times PH$ & Sinus anguli STN conjunctim, sive ut contentam sub sinibus trium angulorum TPi , PIA & STN .

Si anguli illi, Nodis in Quadraturis & Luna in Syzygia existentibus, recti sint, lineola ml adibit in infinitum, & angulus mTi evadet angulo mPi æqualis. Hoc autem in casu, angulus mPi est ad angulum PTM , quem Luna eodem tempore motu suo apparente circa Terram describit ut 1 ad 59,57. Nam angulus mPi æqualis est angulo LPm , id est angulo deflexionis L , & a recto tramite, quam præfata vis Solaris IT dato illo tempore generare possit, & angulus PTM æqualis est angulo deflexionis

Lunæ

Luna a recto tramite, quem vis illa, qua Luna in Orbe suo retinetur, eodem tempore generat. Et hæ vires, uti supra diximus, sunt ad invicem ut 1 ad 59,5-5. Ergo cum motus medius horarius Lunæ respectu fixarum sit $32.56.27.12''$, motus horarius Nodi in hoc casu erit $33.10.33.12$. Aliis autem in casibus motus iste horarius erit ad $33.10.33.12$, ut contentum sub sinibus angulorum trium TPI , PTN , & STN (scilicet distantiarum Lunæ a Quadratura, Lunæ a Nodo & Nodi a Sole) ad cubum Radii. Et quod si signum anguli alicujus de affirmativo in negativum deque negativo in affirmativum mutatur, debet motus regressivus in progressivum & progressivus in regressivum mutari. Unde fit ut Nodi progrediantur quousque Luna inter Quadraturam alterutram & Novam Quadraturæ proximam verlatur. Aliis in casibus regrediantur, & per excessum regressus supra progressum, singulis mensibus tenentur in antecedentia.

Coro. 1. Hinc si a dati arcus quam minimi PM terminis P & M ad lineam Quadraturas iungentem Q demittantur perpendiculara PK , MA , eademque producantur donec lecent lineam Nodorum



Nu in D & d ; erit totus horarius Nodorum ut area $MPDa$ & quadratum lineæ AZ conjunctum. Sunt enim PK , PH & AZ prædicti tres Sinus. Nemppe PK Sinus distantie Lunæ à Quadratura,

PH Sinus distantie Lunæ a Nodo, & AZ Sinus distantie Nodi à Sole: & erit velocitas Nodi ut contentum $PK \times PH \times AZ$. Lit autem

autem PT ad PK ut PM ad Kk , adeoque ob datas PT & PM est Kk ipsi PK proportionalis. Est & AT ad PD ut AZ ad PH , & propterea PH rectangulo $PD \times AZ$ proportionalis, & conjunctis rationibus, $PK \times PH$ est ut contentum $Kk \times PD \times AZ$, & $PK \times PH \times AZ$ ut $Kk \times PD \times AZ$ id est ut area $PDdM$, & AZ qu. conjunctum. $Q.E.D.$

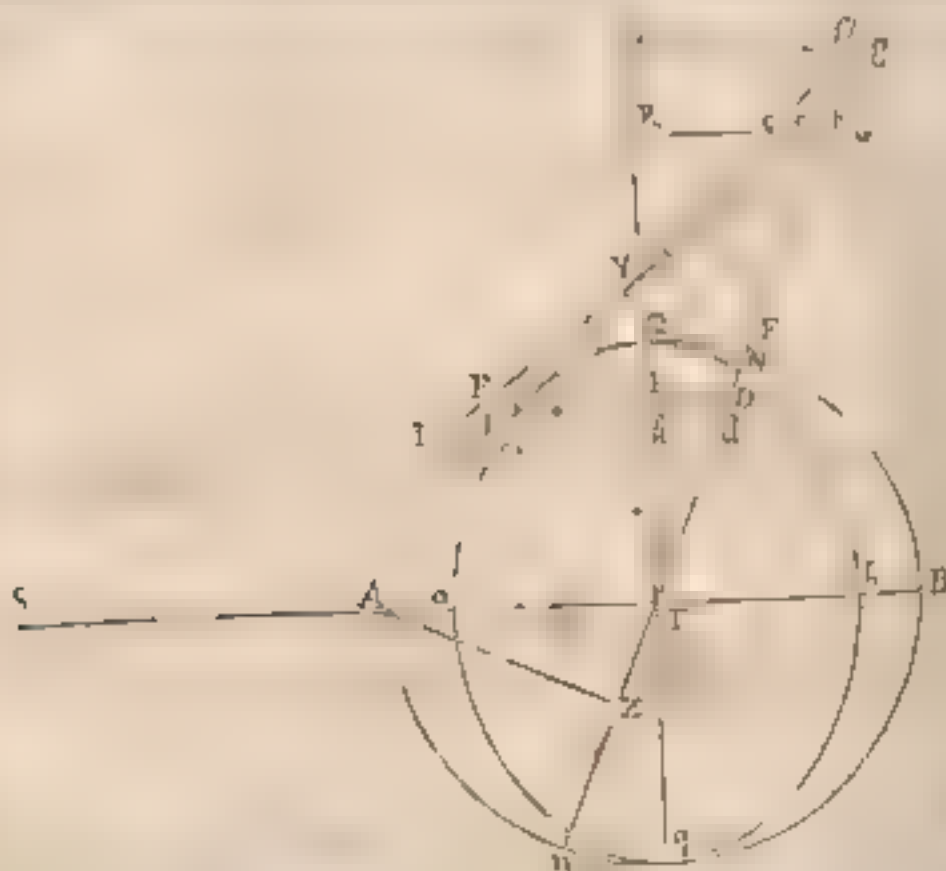
Corol. 2. In data quavis Nodorum positione, motus horarius mediocris est semissis motus horari in Syzygis Lunæ, ideoque est ad $16.35.16''$. $36.$ ut quadratum Sinus distantie Nodorum a Syzygis ad quadratum Radii, sive ut AZ qu. ad AT qu. Nam si Luna uniformi cum motu perambulet semicirculum QAJ , summa omnium arearum $PDdM$, quo tempore Luna pergit a Q ad M , est area $QMdFq$. & ad circuli tangentem QF terminatur & quo tempore Luna attingit punctum u , summa da est area tota Qdu quam linea PD describit, dein Luna pergente ad u ad q , area PD cadet extra circulum, & arcum uq ad circuli tangentem se terminatam describet, quæ, quoniam Nodi pro se recipiuntur jam vero progrediuntur, subdubitet de area parte & circumscripta sit area QkN se inquit semicirculum QAJ . Summa autem omnium arearum $PDdM$, quo tempore Luna semicirculum describit, est area semicirculi, & summa omnium quo tempore Luna circumcirculum describit est area circuli totius. At area $PDdM$ cum Luna velatur in Syzygis, est rectangulum PM & radii MT , & summa omnium hinc æquatur rectangulo quo tempore Luna circumcirculum describit est rectangulum MT & circumferentia tota & radii circuli & hoc rectangulum cum ipso semicirculo circumscripto majus est quam rectangulum PM & radii MT vel citate uniformiter commensurata quam MT & circumferentia tota, ideoque spatium duplo majus describerent quod semicirculum & rectangulum, & propterea motus mediocris quocumque loco, si Luna uniformiter perambulet, patiamur se inæquabili cum motu horario Luna uniformiter perambulet, est semissis motus quem habet Luna in Syzygis, id est motus horarius maximus, si Nodi in Quadrantibus velantur, in $33.10''$. 33.12 , motus mediocris ubi area $PDdM$ non occurrat

16 . 35' . 16 . 36 . Et cum motus horarius Nodorum semper sit ut AZ qu. & area $P D d M$ conjunctum, & propterea motus horarius Nodorum in Syzygiis Lunæ ut AZ qu. & area $P D d M$ conjunctum, id est (ob datam aream $P D d M$ in Syzygiis descriptam) ut AZ qu. erit etiam motus mediocris ut AZ qu. atque adeo hic motus, ubi Nodi extra Quadraturas versantur, erit ad 16". 35' . 16 . 36'. ut AZ qu. ad AT qu. $Q.E.D.$

Prop. XXXI. Prob. XI.

Invenire motum horarium Nodorum Lunæ in Orbe Elliptico.

Designet $Q p m a q$ Ellipsim, axe majore Qq , minore $a b$ descriptam, $Q A q$ circulum circumscriptum, T Terram in utraque



centro communi, S Solem, p Lunam in Ellipsi moventem, & $p m$ arcum quem data temporis particula quam minima describat, N & n Nodos

Nodos linea Nn junctos, pK & mk perpendicularia in axem Q de
nulla & hinc inde producta, donec occurrant circulo in P & M , &
lineæ Nodorum in D & d . Et si Luna, radio ad Terram ducta,
aream describat temporis proportionalem, erit motus Nodi in El
lipsi ut area $pKkm$.

Nam si PF tangat circulum in P , & producta occurrat TN in
 F , & pf tangat Elliptin in p & producta occurrat eodem TN in
 f , conveniunt autem hæ Tangentes in axe TQ ad I , & si ML de
signet spatium quod Luna in circulo revolvens, interea dum decri
bit arcum PM , urgente & impellente vi prædicta IT , motu
transverso describere posset, & ml designet spatium quod Luna in
Ellipsi revolvens eodem tempore, urgente eam vi IT , descri
bere posset; & producantur LP & lp donec occurrant plano El
lipticæ in G & g , & jungantur FG & fg , quarum FG producta
fecerit pf , pg & TQ in e , e & R respectivè, & fg producta levet
 TQ in r : Quoniam vis IT seu pK in circulo est ad vim IT
seu pK in Ellipsi, ut pK ad pK , seu AI ad aT , erit spatium
 ML vi priore genitum, ad spatium ml vi posteriore genitum, ut
 pK ad pK , id est ob similes figuras PKp & PIR , ut IR ad
 eR . Est autem ML ad FG ob similia triangula PLM , PGI ut
 PL ad PG , hoc est (ob parallelas Lk , pK , GR) ut p ad pe ,
id est (ob similia triangula plm , epe) ut lm ad ee , & inverse
ut LM est ad lm , seu IR ad eR , ita est IR ad ee . It prop
terea si fg esset ad ee ut IT ad eI , id est ut fi ad eR . (hoc est
ut fi ad FR & IR ad eR conjunctim, id est ut fi ad FI &
 FG ad ee conjunctim,) quoniam ratio IR ad ee utrinque abla
ta relinquit rationes fg ad IR & fi ad FI , foret fg ad IR ut
 fi ad FI , propterea quod anguli, quos IR & fg subtenderent
ad Terram I , æquarentur inter se. Sed anguli illi per ea quæ in
præcedente Propositione exposuimus) sunt motus Nodorum, quo
tempore Luna in circulo arcum PM , in Ellipsi arcum pm percur
rit & propterea motus Nodorum in Circulo & Ellipsi æquarentur
inter se. Hæc ita se haberent, si modo fg esset ad ee ut fi ad eI ,

id est si fg æqualis esset $\frac{v^2}{r}$. Verum ob similia triangula fgp , cep , est fg ad ce ut fp ad cp , ideoque fg æqualis est $\frac{v^2}{r}$, & propterea angulus, quem fg recta subten dit, est ad angulum priorem, quem FG subten dit, hoc est motus Nodorum in Lili ipsi ad motum Nodorum in Circulo, ut hæc fg seu $\frac{v^2}{r}$ ad priorem fg seu $\frac{v^2}{r}$, id est ut $fp \times cY$ ad $cp \times fY$, seu fp ad fY & cY ad cp hoc est, si p ipsi TN parallela occurrat FP in b , ut fb ad Ff & Ff ad fP , non est ut fb ad FP seu Dp ad DP , adeoque ut area $Dpmf$ ad aream $DPmf$. Et propterea, cum area posterior proportionalis sit motui Nodorum in Circulo, erit area prior proportionalis motui Nodorum in Ellipsi. Q. E. D.

Corol. Igitur cum, in data Nodorum positione, summa omnium arearum pDm , quo tempore Luna pergit a Quadratura ad locum quemvis m , sit area $m p Q E d$, quæ ad Ellipticos Tangentem QE terminatur, & summa omnium arearum earum, in revolutione integra, sit area Ellipticos totius motus medioctis Nodorum in Ellipsi erit ad motum medioctem Nodorum in circulo, ut Ellipsis ad circumferentiam, id est ut $I A$ ad $I A$, seu $68'$ ad $69''$. Et propterea, cum motus medioctis horarius Nodorum in circulo sit ad $16' 35'' 16'' 36''$, ut AZ per ad AI per in capiat angulus $16' 21'' 2'' 36''$, ad angulum $16' 35'' 16'' 36''$ ut $68'$ ad $69''$, erit motus medioctis horarius Nodorum in Ellipsi ad $16' 21'' 2'' 36''$ ut AZ per ad AI per, hoc est ut quadratum sinus distantie Nodi a Sole ad quadratum Radius.

Ceterum Luna, radio ad Terram ducto, aream velocius describit in Syzygia quam in Quadraturis, & eo nomine tempus in Syzygiis contrahitur, in Quadraturis producit, & una cum tempore motus Nodorum agetur & diminuitur. Erat autem momentum areæ in Quadraturis Lunæ ad eas momentum in Syzygiis ut 10973 ad 11073 , & propterea momentum medioctis in Octantibus est ad excessum in Syzygiis, detectumque in Quadraturis, ut numerorum semisumma 11023 ad eorundem semidifferentiam 50 .

Unde

Unde cum tempus Lunæ in singulis Orbis particulis æqualibus sit reciproce ut ipsius velocitas, erit tempus mediocre in Octantibus ad excessum temporis in Quadrantibus, ac defectum in Syzigiis, ab hac causa oriundum, ut 11023 ad 50 quam proxime. Pergendo autem a Quadraturis ad Syzigiis, invenio quod excessus momentorum areæ in locis singulis, supra momentum minimum in Quadraturis, sit ac quadratum Sinus distantie Lunæ a Quadraturis quam proxime, & propterea differentia inter momentum in loco quocunque & momentum mediocre in Octantibus, est ut differentia inter quadratum Sinus distantie Lunæ a Quadraturis & quadratum Sinus graduum 45, seu semilem quadrati Radii, & incrementum temporis in locis singulis inter Octantes & Quadraturas, & decrementum eius inter Octantes & Syzigiis est in eadem ratione. Motus autem Nodorum, quo tempore Luna percurrit singulas Orbis particulas æquales, acceleratur vel retardatur in duplicata ratione temporis. Est enim motus iste, dum Luna percurrit PM , (ceteris paribus) ut ML , & ML est in duplicata ratione temporis. Quare motus Nodorum in Syzigiis, eo tempore contactus quo Luna datæ Orbis particulas percurrit, diminuitur in duplicata ratione numeri 11073 ad numerum 11023, estque decrementum ad motum reliquum ut 100 ad 10973, ad motum vero tamen ut 100 ad 11073 quam proxime. Decrementum autem in locis inter Octantes & Syzigiis, & incrementum in locis inter Octantes & Quadraturas, est quam proxime ad hoc decrementum, ut motus in locis istis ad motum totum in Syzigiis & differentia inter quadratum Sinus distantie Lunæ a Quadraturis & semilem quadratum Radii ad semilem quadratum Radii, conveniet in. Unde si Nodi a Quadraturis vertentur, & capiantur loca duo æqualiter ab Octante hinc inde distantia, & alia duo a Syzigiis & Quadratura utrinque intervallis distantia, deque decrementis motuum in locis duobus inter Syzigiis & Octantem, subducantur incrementa motuum in locis reliquis duobus, quæ sunt inter Octantem & Quadraturam, decrementum reliquum æquale erit decremento in Syzigiis: uti ratio

nem inveni facile constabit. Proindeque decrementum mediocre, quod de Nodorum motu mediocri subdaci debet, est pars quarta decrementi in Syzygia. Motus totus horarius Nodorum in Syzygiis (ubi Luna radio ad Terram ducto arcum tempori proportionalem describere supponebatur) erat $32.42''.5''.12.$ Et decrementum motus Nodorum, quo tempore Luna jam velocior describit idem spatium, diximus esse ad hunc motum ut 100 ad 11073, adeoque decrementum illud est $17''.43''.10'$, cuius pars quarta $4''.15''.48'$, motui horario mediocri superius invento $16''.2''.2''.36'$ subducta, relinquit $16''.16''.36''.48'$ motum medicrem horarium correctum.

Si Nodi verentur extra Quadraturas, & spectentur loca bina a Syzygiis hinc inde æqualiter distantia, summa motuum Nodorum, ubi Luna versatur in his locis, erit ad summam motuum, ubi Luna in ipsis locis & Nodi in Quadraturis verentur, ut AZ_{qu} ad AT_{qu} . Et decrements motuum, a causis jam expositis oriunda, erunt ad invicem ut ipsi motus, adeoque motus reliqui erunt ad invicem ut AZ_{qu} ad AT_{qu} & motus mediocres ut motus reliqui. Est itaque motus medicrus horarius correctus, in dato quocunque Nodorum loco, ad $16.16''.36''.48'$ ut AZ_{qu} ad AT_{qu} , id est ut quadrata in Sinu distantie Nodorum a Syzygiis ad quadratum Radii

Prop. XXXII. Prob. XII.

Invenire motum medicrum Nodorum Luna.

Motus medicrus annuus est summa motuum omnium horariorum medicrum in anno. Concipe Nodum versari in N , & singulis horis completis retrahi in locum suum priorem, ut non obstantem motu suo proprio, datum semper servet situm ad Scelias fixas. Interea vero Solem S , per motum Terræ, progredi à Nodo, & cursum annum apparentem uniformiter complere. Sit autem Aa arcus datus quam minimus, quem recta TS ad Solem semper ducta, inter-

in loco quovis N sit ad ipsius motum medioarem in Quadrantibus
 suis, ut AZq ad ATq . ent motus Solis ad motum Nodi in N , ut
 $360 ATq$ ad $39,8349 AZq$, id est ut $9,827032 ATq$ ad AZq .
 Unde si circuli totius circumferentia NAn dividatur in particulas
 æquales Aa , tempus quo Sol percurrat particulam Aa , si circulus
 quæsceret, erit ad tempus quo percurrat eandem particulam, si cir-
 culus una cum Nodus circa centrum T revolvatur, reciproce ut
 $9,8819012 ATq$ ad $9,8819012 ATq + AZq$. Nam tempus est
 reciproce ut velocitas qua particula percurritur, & hæc velocitas est
 summa velocitatum Solis & Nodi. Igitur si tempus, quo Sol abs-
 que motu Nodi percurreret arcum NA , exponatur per Sectorem
 NTA , & particula temporis quo percurreret arcum quam mini-
 mum Aa , exponatur per Sectoris particulam ATa , & (perpendi-
 culo a) in An demitto) si in AZ capiatur dZ , eius longitudo sit
 ut sit rectangulum dZ in ZT ad Sectoris particulam ATa ut AZq
 ad $9,8819012 ATq + AZq$. id est ut sit dZ ad AZ ut ATq ad
 $9,8819012 ATq + AZq$, rectangulum dZ in ZT designabit
 decrementum temporis ex motu Nodi oriundum, tempore toto
 quo arcus Aa percurritur. Et si punctum d tangat curvam $NdGa$,
 area curvilinea NdZ erit decrementum in totum, quo tempore ar-
 cus totus NA percurritur, & propterea excessus Sectoris NTA su-
 pra aream NdZ erit tempus illud totum. Et quoniam motus
 Nodi tempore minore maior est in ratione temporis, debet etiam
 area $AaTZ$ esse minor in eadem ratione. Id quod hec si capiatur in
 AZ longitudo eZ , quæ sit ad longitudinem AZ ut AZq ad
 $9,8819012 ATq + AZq$. Sic enim rectangulum eZ in ZT erit
 ad aream AZT ut decrementum temporis, quo arcus Aa percur-
 ritur, ad tempus totum, quo percurreretur si Nodus quæsceret.
 Et propterea rectangulum illud respondeat decremento motus No-
 di. Et si punctum e tangat curvam $Nefu$, area tota $NefZ$ quæ
 summa est omnium decrementorum, respondeat decremento toti,
 quo tempore arcus NA percurritur, & area reliqua Nde respon-
 deat motui reliquo, qui verus est Nodi motus quo tempore arcus
 totus

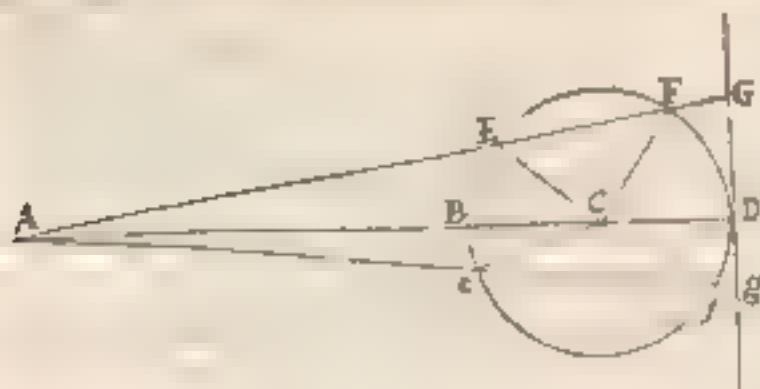
totus NA , per Solis & Nodi conjunctos motus, percurritur. Jam
 verò si circuli radius AT ponatur 1, erit area semicirculi 1,570796,
 & area figuræ $NeFnT$, per methodum Senerum infinitarum quæ-
 sita, prodibit 0,88478. Motus autem qui respondet circulo toti
 erat 19 gr. 49. 2. 49'', & propterea motus, qui figuræ $NeFnT$
 duplicatæ responderet, est 1 gr. 29. 57. 51''. Qui de motu pri-
 ore subductus relinquit 18 gr. 19. 4. 58''. motum totum Nodi in-
 ter suas ipsius Conjunctiones cum Sole, & hic motus de Solis motu
 annuo graduum 360 subductus, relinquit 341 gr. 40. 55. 2''.
 motum Solis inter eandem Conjunctiones. Ille autem motus est
 ad motum annum 360 gr. ut Nodi motus jam inventus 18 gr.
 19. 4. 58. ad ipsius motum annum, qui propterea erit 19 gr.
 18. 0. 22''. Hic est motus medius Nodorum in anno sidereo.
 Idem per Tabulas Astronomicas est 19 gr. 20. 31. 1''. Differen-
 tia minor est parte quadringentesima motus totius, & ab Orbis
 Lunaris Excentricitate & Inclinatione ad planum Eclipticæ ori-
 vetur. Per Excentricitatem Orbis motus Nodorum nimis acce-
 leratur, & per ejus Inclinationem vicissim retardatur aliquantum,
 & ad justam velocitatem reducitur.

Prop. XXXIII. Prob. XIII.

Invenire motum verum Nodorum Luna.

In tempore quod est ut area $NTd = NdZ$, (ut Fg præced.)
 motus iste est ut area $NdeN$, & inde datur. Verum ob nimiam
 calculi difficultatem, præstat sequentem Problematis con-
 stractionem adhibere. Centro C , intervallo quovis CD , describatur
 circulus $BEFD$. Producat DC ad A , ut sit AB ad AC ut
 motus medius ad semilem motus veri mediocris, ubi Nodi sunt
 in Quadraturis. (id est ut 19 gr. 18. 0. 22. ad 19 gr. 49. 2.
 49'', atque adeo BC ad AC ut motum differant 10 gr. 31. 2.
 27'', ad motum superiorem 19 gr. 49. 2. 49'', hoc est, ut 1
 ad

ad 38;) dein per punctum D ducatur infinita Gg , quæ tangat circulum in D , & si capiatur angulus BCE vel BCF æqualis semissi-



distantiæ Solis à loco Nodi, per motum medium invento, & agatur AE vel AF secans perpendicularum DG in G , & capiatur angulus qui sit ad motum Nodi

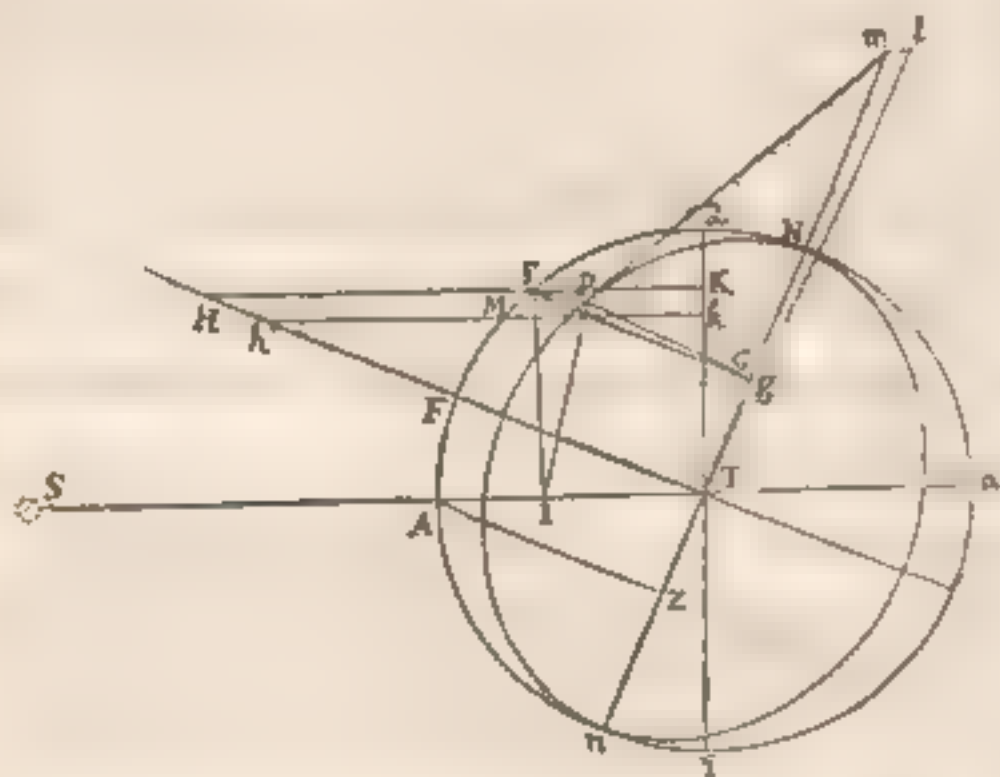
inter ipsius Syzygias (id est ad 9 gr. 10'. 40".) ut tangens DG ad circuli $BF D$ circumferentiam totam, atque angulus iste ad motum medium Nodorum addatur; habebitur eorum motus verus. Nam motus verus sic inventus congruet quam proxime cum motu vero qui prodit exponendo tempus per aream $NTA - NdZ$, & motum Nodi per aream $NAeN$, ut rem perpendiculari constabit. Hæc est æquatio annua motus Nodorum. Est & æquatio mensura, sed quæ ad inventionem Latitudinis Lunæ minime necessaria est. Nam cum Variatio inclinationis Orbis Lunaris ad planum Eclipticæ duplici inæqualitati obnoxia sit, alteri annuæ, alteri autem mensuræ; hujus mensuræ inæqualitas & æquatio mensuræ Nodorum ita se mutuo contemperant & corrigunt, ut ambæ in determinanda Latitudine Lunæ negligi possint.

Corol. Ex hac & præcedente Propositione liquet quod Nodi in Syzygiis suis quiescunt, in Quadraturis autem regrediantur motu horatio 16. 18. 41'. Et quod æquatio motus Nodorum in Octantibus sit 1 gr. 30. Quæ omnia cum Phænomenis coelestibus probè quadrant.

Prop. XXXIV. Prob. XIV.

*Invenire Variationem horariam inclinationis Orbis Lunaris ad
planum Eclipticæ.*

Designent *A* & *a* Syzygias, *Q* & *q* Quadraturas, *N* & *n* Nodos; *P* locum Lunæ in Orbe suo, *p* vestigium loci illius in plano Eclipticæ, & *m* *Tl* motum momentaneum Nodorum ut supra. Et si ad lineam *Tm* demittatur perpendicularum *PG*, jungatur *pG*,



& producatur ea donec occurrat *Tl* in *g*, & jungatur etiam *Pg* erit angulus *PGp* inclinatio orbis Lunaris ad planum Eclipticæ, ubi Luna versatur in *P*; & angulus *Pgp* inclinatio eadem post momentum temporis completum, adeoque angulus *GPG* Variatio
H h h mo-

momentanea inclinationis. Est autem hic angulus $G P g$ ad angulum $G T g$ ut $T G$ ad $P G$ & $P p$ ad $P G$ conjunctim. Et propterea si pro momento temporis substatuatur hora, cum angulus $G T g$ (per Prop. XXX) sit ad angulum $33^{\circ}. 10'. 33''$. ut $I T x P G x A Z$ ad $A I$ cub. erit angulus $G P g$, seu inclinationis horariae Variatio ad angulum $33^{\circ}. 10'. 33''$. ut $I T x A Z x T G x \frac{P p}{P G}$ ad $A I$ cub. Q. E. D.

Hæc ita se habent ex Hypothesi quod Luna in Orbe circulari uniformiter gyretur. Quod si orbis ille Ellipticus sit, motus mensuris Nodorum mutatur in ratione axis minoris ad axem majorem, uti supra expostum est. Et in eadem ratione minuetur etiam Sinus $I I$. Inclinationis autem Variatio tantum augebitur per decrementum Sinus $I T$, quantum diminuitur per decrementum motus Nodorum, & propterea idem manebit atque prius.

Corol. 1. Si ad $N a$ erigatur perpendicularum $T F$, sitque $p M$ motus horarius Lunæ in plano Eclipticæ, & perpendiculara $p K$, $M k$ in $Q T$ demissa & utrinque producta occurrant $T F$ in H & h . erit $K k$ ad $M p$ ut $p K$ seu $I I$ ad $A I$, & $T Z$ ad $A T$ ut $I G$ ad $H p$; ideoque $I T x I G$ æquale $\frac{A k x I I x I T}{A I p}$, hoc est æquale areæ $H p M I$ ductæ in rationem $\frac{T T}{I I p}$ & propterea inclinationis Variatio horaria ad $33^{\circ}. 10'. 33''$ ut $H p M h$ ducta in $A Z x \frac{T Z}{A I p} x \frac{P p}{P G}$ ad $A I$ cub.

Corol. 2. Illeque si Terra & Nodi singulis horis completis retraherentur a locis suis novis, & in loca priora in instanti semper reverterentur, ut fitis eorum, per mentem integram periodicam, Jacta maneret, tota Inclinationis Variatio tempore mensis illius torret ad $33^{\circ}. 10'. 33''$, ut aggregatum omnium arearum $H p M h$, in revolutione puncti p generatarum, & sub signis propriis + & - contractarum, ductum in $A Z x I Z x \frac{P p}{P G}$, ad $M p x A T$ cub. id est ut circulus totus $Q d q a$ ductus in $A Z x T Z x \frac{P p}{P G}$ ad $M p x A T$ cub.

cub. hoc est ut circumferentia QA ducta in $AZ \times TZ \times \frac{P}{PG}$ ad $2 Mp \times P T$ quad.

Corol. 3. Proinde in dato Nodorum situ, Variatio mediocris horaria, ex qua per mensem uniformiter continuata Variatio illa menstrua generari posset, est ad $33. 10. 33$. ut $AZ \times TZ \times \frac{P}{PG}$ ad $2 AT$ id est (cum Pp sit ad PG ut Sinus Inclinationis prædictæ ad Radium, & $AZ \times TZ$ sit ad AT ut sinus duplicatus anguli AT ad Radium) ut inclinationis ejusdem Sinus ductus in Sinum duplicatæ distantie Nodorum a Sole, ad quadruplum quadratum Radii.

Corol. 4. Quoniam inclinationis horaria Variatio, ubi Nodi in Quadraturis versantur, est (per Propositionem superiorem) ad angulum $33. 10. 33$. ut $IT \times AZ \times TG \times \frac{P}{PG}$ ad AT cub id est ut $\frac{IT \times TG}{AT} \times \frac{P}{PG}$ ad AT , hoc est ut Sinus duplicatæ distantie Lunæ à Quadraturis ductus in $\frac{P}{PG}$ ad radium duplicatum. Summa omnium Variationum horarum, quo tempore Luna in hoc situ Nodorum transit à Quadratura ad Syzygiam, (id est spatio horarum $177\frac{1}{2}$), erit ad summam totidem angularem $33. 10. 33$. seu $5878'$, ut summa omnium sinuum duplicatæ distantie Lunæ à Quadratura ducta in $\frac{P}{PG}$ ad summam totidem diametrorum: hoc est ut diameter ducta in $\frac{P}{PG}$ ad circumferentiam, id est sinus arcus sit 3 gr 2 , ut $7 \times$ ad 22 , seu 279 ad 10000 . Proinde Variatio tota, ex summa omnium horarum Variationum tempore prædicto conflata, est 164 , seu $2. 44$.

In hac demonstratione supposui angulum BEG , qui distantia est Nodorum a Quadraturis, uniformiter augeri. Nam omnes inæqualitatum minutias expendere non vacat. Concipe jam angulum BEG rectum esse, & Gg esse augmentum horarum distantie Nodorum & Solis ab invicem; & inclinationis Variatio horaria (per Corol. 3. Prop. novissimæ) erit ad $33.10.33$. ut contentum sub inclinationis Sinu AH & Sinu anguli recti BEG , qui est duplicata distantia Nodorum a Sole, ad quadruplum quadratum Radii; id est ut medioctis inclinationis Sinus AH ad radium quadruplicatum; hoc est (cum inclinatio illa medioctis sit quasi $5^{\circ} 8'$) ut ejus Sinus 896 ad radium quadruplicatum 40000 , sive ut 224 ad 10000 . Sit autem Variatio tota, Sinuum differentie BD respondens, ad variationem illam horariam ut diameter BD ad arcum Gg ; id est ut diameter BD ad tenuitatem interuenientiam BGD & tempus horarum 2080 , quo Nodus pergit a Quadraturis ad Syzygias, ad horam unam conjunctum, hoc est ut 7 ad 11 & 2080 ad 1 . Quare si rationes omnes conjungantur, fiet Variatio tota BD ad $33.10.33$ ut $224 \times 7 \times 2080$ ad 110000 , id est ut 2965 ad 100 , & inde Variatio illa BD prodibit 16.24 .

Hæc est inclinationis Variatio maxima quatenus locus Lunæ in Orbe suo non consideratur. Nam inclinatio, si Nodi in Syzygiis variantur, non mutatur ex vario situ Lunæ. At si Nodi in Quadraturis consistunt, inclinatio maior est ubi Luna versatur in Syzygiis, quam ubi ea versatur in Quadraturis, excessu 2.44 , uti in Propositionis superioris Corollario quarto indicavimus. Et huius excessus dimidio 1.22 Variatio tota medioctis BD in Quadraturis Lunaribus diminuta fit 15.2 , in ipsius autem Syzygiis aucta fit 17.46 . Si Luna igitur in Syzygiis consistat, Variatio tota, in transitu Nodorum a Quadraturis ad Syzygias, erit 17.46 . adeoque si Inclinatio, ubi Nodi in Syzygiis variantur, sit $5^{\circ} 17' 46''$ eadem, ubi Nodi sunt in Quadraturis, & Luna in Syzygiis, erit 5° . Atque hæc ita se habere confirmatur ex Observationibus. Nam statuunt Astronomi Inclinationem Orbis Lunaris ad planum Eclip-

tice, ubi Nodi sunt in Quadraturis & Luna in oppositione Solis, esse quasi 5 gr. Ubi vero Nodi sunt in Syzygiis, eandem docent esse 5 gr. 17, vel 5 gr. 18.

Si jam desideretur Orbis Inclinatione ula, ubi Luna in Syzygiis & Nodi ubivis veriantur; fiat AB ad AD ut Sinus 5 gr. ad Sinum



5 gr. 17. 46", & capiatur angulus AEG æqualis duplicatae distantiae Nodorum à Quadraturis; & erit AH Sinus In-

clinationis quaesitæ. Hunc Orbis Inclinationi æqualis est ejusdem Inclinatione, ubi Luna distat 90 gr. a Nodis. Atque in Lunæ locis inæqualitas mensuræ, quam Inclinationis variatio admittit, in calculo Latitudinis Lunæ compensatur & quodammodo tollitur per inæqualitatem mensuræ motus Nodorum, (ut supra diximus) adeoque in calculo Latitudinis illius negligi potest.

Scholium.

Haftenus de motibus Lunæ quatenus Excentricitas Orbis non consideratur. Similibus computationibus inveni, quod Apogæum, ubi in Conjunctione vel Oppositione Solis vertitur, progreditur singulis diebus 23 respectu Fixarum, ubi vero in Quadraturis est, regreditur singulis diebus 16' circiter: quodque ipsius motus mensuræ annuus sit quasi 40 gr. Per Tabulas Astronomicas à Ci. Flamstedio & Hypothesein Horroxii accommodatas, Apogæum in ipsis Syzygiis progreditur cum motu diurno 24. 28', in Quadraturis autem regreditur cum motu diurno 20. 12, & motu medio annuo 40 gr. 41 fertur in consequentia. Quod differentia inter motum diurnum progressivum Apogæi in ipsis Syzygiis, & motum diurnum regressivum in ipsis Quadraturis, per Tabulas sit 4. 16, per computationem vero nostram 6', vitio Tabularum tribuendum esse iulpi-

Corol. Hinc cum vis centrifuga partium Terræ à diurno Terræ motu oriunda, quæ est ad vim gravitatis ut 1 ad 291, efficiat ut altitudo Aquæ sub Æquatore superet ejus altitudinem sub polis mensura pedum Parisiensium 85200, vis Solaris, de qua egimus, cum sit ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, atque adeo ad vim illam centrifugam ut 291 ad 12868200 seu 1 ad 44221, efficiet ut altitudo aquæ in regionibus sub Sole & Soli oppositis superet altitudinem ejus in locis quæ 90 gradibus distant à Sole, mensura tantum pedis unius Parisiensis & digitorum undecim. Est enim hæc mensura ad mensuram pedum 85200 ut 1 ad 44221.

Prop. XXXVII. Prob. XVII.

Invenire vim Lune ad Mare movendum.

Vis Lunæ ad mare movendum colligenda est ex ejus proportionem ad vim Solis, & hæc proportio colligenda ex proportionem motuum maris, qui ab his viribus oriuntur. Ante ostium fluvii *Avona*, ad lapidem tertium intra *Bristoliam*, tempore verno & autumnali totus æquæ altentis in Conjunctione & Oppositione Luminarium (observante *Samuele Sturmo*) est pedum plus minus 45, in Quadraturis autem est pedum tantum 15: Altitudo prior ex summa virium, posterior ex earundem differentia oritur. Solis igitur & Lunæ in Æquatore versantium & mediocriter a Terra distantium, sunt vires *S* & *L*. Et quoniam Luna in Quadratura, tempore verno & autumnali extra Æquatorem in declinatione graduum plus minus 23 versatur, & Luminaris ab Æquatore declinantis vis ad mare movendum minor sit, idque (quantum sentio) in duplicata ratione Sinus complementi declinationis quam proximè, vis Lunæ in Quadraturis, (cum sinus ille sit ad radium ut 91706 ad 100000) erit $\frac{1}{2} L$, & summa virium in Syzygis erit $L + S$, ac differentia in Quadraturis $\frac{1}{2} L - S$, adeoque $L + S$ erit ad $\frac{1}{2} L - S$ ut 45 ad 25 seu 9 ad 5, & inde $5 L + 5 S$ æqualis erit $\frac{1}{2} L - 9 S$, &

14 Sæqualis $\frac{1}{2}$ L, & propterea L ad S ut 14000 ad 2560 $\frac{1}{2}$ 5' ad 1. In Portu *Plymuth* ætus maris (ex observatione *Smythæ* compressi) ad pedes plus minus sexdecim, altitudine mediæ æti attolitur, ac tempore verno & autumnali altitudo ætus in *Syzygiis* Lunæ superare potest altitudinem ejus in Quadratis respectu æpæm vel octo. Si excessus mediocris his temporibus sit pedum septem cum dimidio, ætus in *Syzygiis* ascendet ad pedes 19, in Quadratis ad pedes 12, & sic L + S erit ad $\frac{1}{2}$ L - S ut 12, ad 12, & inde L ad S ut 734 ad 100 seu $\frac{7}{10}$, ad 1. L tunc erit ad vim Solis per computationem priorem ut 5' ad 1, per posteriorem ut 7, ad 1. Donec aliquid certius ex Observationibus acciderit, constitutis constitutis, utar pabimus proportionem medietatem 6, ad 1. Unde cum vis Solis sit ad vim gravitatis ut 1 ad 12866200, vis Lunæ erit ad vim gravitatis ut 1 ad 2031821.

Corol. 1. Igitur cum aqua vi Solis agitata ad altitudinem pedis unius & undecim digitorum ascendar, eadem vi Lunæ ascendet ad altitudinem pedum duodecim. Tanta autem vis ad omnes maris motus excitandos abunde sufficit, & quantitati motuum probe respondet. Nam in maribus quæ ab Oriente in Occidentem late patent, uti in Mari *Pacifico*, & Maris *Atlantici* & *Æthiopici* part. vis extra Tropicos, aqua attolli solet ad altitudinem pedum sex, novem duodecim vel quindecim. In mari autem *Pacifico*, quod profundius est & latius patet, ætus dicuntur esse majores quam in *Atlantico* & *Æthiopico*. Iterum ut prius sit ætus, tanto Maris ab Oriente in Occidentem non minor esse debet quam gradum nonaginta. In Mari *Æthiopico*, accens aquæ intra Tropicos minor est quam in Zonis temperatis, propter angustiam Maris inter *Africam* & *Australem* partem *Americæ*. In medio Mari aqua neque ascendere nisi ad litus utrumque & orientale & occidentale litus descendat cum tamen vicibus alternis ad littora illa in Mariibus nostris angustis descendere debeat. Ea de causa fluxus & refluxus in litibus, quæ a utronibus longissime abant, perexiguus esse solet. In Portibus quibusdam, ubi aqua cum impetu magno per loca

[11]

vado-

vadosa, ad Sinus alternis vicibus implendos & evacuandos, influere & effluere cogitur, fluxus & refluxus sunt solito majores, uti ad *Pymatun* & pontem *Chepstowe* in *Anglia*, ad montes *S. Michaelis* & urbem *Abrincatorum* (vulgo *Aranche*) in *Normania*, ad *Cambaiam* & *Pegu* in *India orientali*. His in locis mare, magna cum velocitate accedendo & recedendo, littora nunc inundat nunc arida relinquit ad multa *Milia*. Neque impetus influendi & remeandi prius trahi potest, quam aqua attollitur vel deprimatur ad pedes 30, 40 vel 50 & amplius. Et par est ratio fretorum oblongorum & vadosorum, uti *Magenau*, & ceteris quo *Anglia* circumdatur. Aëlis in huiusmodi portibus & fretis per impetum curfus & recursus supra modum augetur. Ad littora vero quæ delensu præcipiti ad mare profundum & apertum spectant, ubi aqua sine impetu effluendi & remeandi attolli & subiacere potest, magnitudo æstus respondet viribus Solis & Lunæ.

Corol. 2. Cum vis Lunæ ad mare movendum sit ad vim gravitatis ut 1 ad 1031821, perspicuum est quod vis ista sit longe minor quam quæ vel in experimentis *Pendulorum*, vel in *Staticis* aut *Hydrostaticis* quibuscunque sensiri possit. In ætate solo marino hæc vis sensibilem edit effectum.

Corol. 3. Quoniam vis Lunæ ad mare movendum est ad Solis vim continuam ut 6 ad 1, & vires illæ sunt ut densitates corporum Lunæ & Solis & cubi diametrorum apparentium conjunctæ in; erit densitas Lunæ ad densitatem Solis ut 6, ad 1 directe & cubus diametri Solis ad cubum diametri Lunæ inverse, id est (cum diametri minores apparentes Solis & Lunæ sint 31.27 & 32.12) ut 34 ad 5. Densitas autem Solis erat ad densitatem Terræ ut 100 ad 387, & propterea densitas Lunæ est ad densitatem Terræ ut 680 ad 387, seu 9 ad 5 quam proxime. Est igitur corpus Lunæ densius & magis terreste quam Terra nostra.

Corol. 4. Unde cum vera diameter Lunæ sit ad veram diametrum Terræ ut 1 ad 355, erit massa Lunæ ad massam Terræ ut 1 ad 26 quam proxime.

Corol.

Corol. 5. Et gravitas acceleratrix in superficie Lunæ, erit quasi duplo minor quam gravitas acceleratrix in superficie Terræ.

Prop. XXXVIII. Prob. XVIII.

Invenire figuram corporis Lunæ.

Si corpus Lunare fluidum esset ad instar maris nostri, vis Terræ ad fluidum illud in partibus & cæcis & ultimis elevandum, esset ad vim Lunæ, quæ mare nostrum in partibus & sub Luna & Lunæ oppositis attollitur, ut gravitas acceleratrix Lunæ in Terram ad gravitatem acceleratricem Terræ in Lunam & diameter Lunæ ad diametrum Terræ conjunctim, id est ut 26 ad 1 & 5 ad 18 conjunctim seu 65 ad 9. Unde cum mare nostrum vi Lunæ attollatur ad pedes duodecim, fluidum Lunare vi Terræ attolli deberet ad pedes fere nonaginta. Hæc de causa figura Lunæ Sphærois esset, cujus maxima diameter producta transiret per centrum Terræ, & superaret diametros perpendiculares excessu pedum 180. Talem igitur figuram Luna affectat, eamque sub initio induere debuit. *Q. E. I.*

Corol. Inde verò fit ut eadem semper Lunæ facies in Terram observetur. In alio enim situ corpus Lunare quiescere non potest, sed ad hunc situm oscillando semper redibit. Attamen oscillationes ob parvitatem virium agitantium essent longe tardissimæ adeo ut facies illa, quæ Terram semper respicere deberet, possit alteram orbis Lunaris umbilicum, ob rationem superius adductam respicere, neque statim abinde retrahi & in Terram converteri.

Lemma I.

Si *APE* p Terram designet uniformiter densam, centroque *C* & per *P*, p & æquatore *A E* delineatam, & si centro *C* radius *CP* describi intelligatur sphaera *Pape*, sit autem *QR* planum, cui recta a cen-

150 So. us ad centrum Terræ ducta normaliter insistit; & Terra totius ex-



te singule conantur recedere hinc inde a plano QR, sitque conatus particule cuiusque ut eijusdem distantia a plano erit vi & efficacia tota particularum omnium, ad Terram circulariter movendam, quadruplo minor quam vis tota particularum totidem in Equatoris circulo AE, uniformiter per totum circumstunt in morem annuli dispositarum, ad Terram consimili motu circulari movendam. Et motus iste circularis circa axem in plano QR jacentem, & axi

Pp perpendiculariter insistentem, peragetur.

Sit etiam IK circulus minor Equatori AE parallelus, sitque L particula Terræ in circulo illo extra globum Pape sita. Et si in planum QR demittatur perpendiculari LM, vis tota particule illius ad Terram circa ipsius centrum convertendum proportionalis erit eidem LM & a nec vis LM (per Legem Corol. 2) distinguatur in vires LN, NM, efficacia virium MN particularum omnium L, in circulo Terræ totius extra globum Pape consistantium, ad Terram circa ipsius centrum secundum ordinem literarum ApP convertendam, erit ad efficaciam vires LN particularum omnium L, ad Terram circa ipsius centrum secundum ordinem literarum in eandem iterarum convertendam, ut tria ad duo. Itaque efficacia virium omnium MN erit ad excessum efficaciarum huius supra efficaciam virium omnium LN ut tria ad unum. Et si particule & omnes locarentur in Equatore, efficacia virium omnium LN evanesceret, & efficacia virium omnium MN augeretur in ratione quatuor ad tria. Quare excessus ille, qui est efficacia abeunda particularum in locis propriis, est pars quarta efficaciarum particularum eundem in Equatore. Motus autem æquino-

ctionum

etiorum est ut hæc efficacia. Singula examinet qui volet. Brevitati consulo.

Lemma II.

Motus autem Terræ totius circa axem illum, ex motibus particularium annuum compositus, erit ad motum annuli circa axem eundem, in ratione composita ex ratione materie in Terra ad materiam in annulo, & ratione trium quadratorum ex arcu quadranti circuli cuiuscunque, ad duo quadrata ex diametro; id est in ratione materie ad materiam & numeri 925275 & 1000000.

Est enim motus Cylindri circa axem suum immotum revolventis, ad motum Sphæræ interceptæ & simul revolventis, ut quilibet quatuor æqualia quadrata ad tres ex circulis sibi interceptis. & motus Cylindri ad motum annuli tenuissimi, Sphæræ & Cylindrum ad communem eorum contactum ambientis, ut duplum materie in Cylindro ad triplum materie in annulo, & annuli motus iste circa axem Cylindri uniformiter continuatus, ad eundem motum uniformem circa diametrum propriam, eodem tempore periodico factum, ut circumferentia circuli ad duplum diametri.

Lemma III

Si annulus, Terra omni reliqua sublata, solus in orbe Terræ motu annuo circa Solem ferretur, & interea circa axem suum, ad punctum Eclipticæ in angulo graduum 22' inclinatum, motu diurno recto & uniformi, idem foret motus Punctorum A quocunque puncto per annulum iste translatus esset, sive ut ex materia rigida & firma constaret.

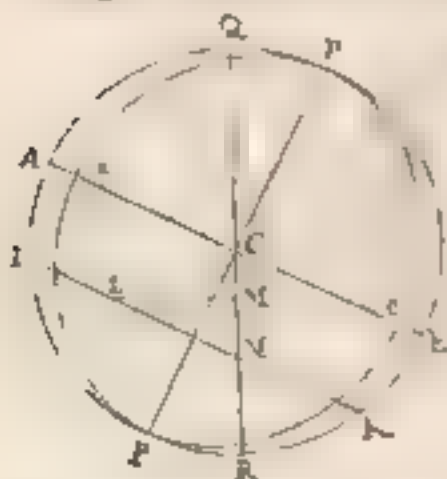
Prop.

Prop. XXXIX. Prob. XIX.

Invenire Præcessionem Æquinoctiorum.

Motus mediocris horarius Nodorum Lunæ in Orbe circulari, ubi Nodi sunt in Quadrantibus, erat $16.35''.16''.36'$. & hujus duratium $8.17''.38''.18$. (ob rationes supra explicatas) est motus medius horarius Nodorum in tali Orbe, fitque anno toto fide-
reo $20\text{ gr. }11.46$. Quoniam igitur Nodi Lunæ in tali Orbe con-
ficerent annuum $20\text{ gr. }11.46$, in antecedentia; & si plures ef-
sent Lunæ motus Nodorum cujusque, per Corol. 16. Prop. LXVI.
Lib. I. forent reciproce ut tempora periodica; & propterea si Luna
ipatio d ei sideris juxta superficiem Terræ revolveretur, motus an-
nuus Nodorum foret ad $20\text{ gr. }11.46$. ut dies sideris horarum
 23.56 . ad tempus periodicum Lunæ diurnum $27.7\text{ hor }43$, id est
ut 1436 ad 39343 . Et par est ratio Nodorum annuli Lunarum
Terram ambientis, siue Lunæ illæ se mutuo ita contingant, siue
liqueant & in anulum continuum formantur, siue denique an-
nulus ille ingelat & inflexionis redatur.

Figamus igitur quod annulus iste quoad quantitatem mater æ

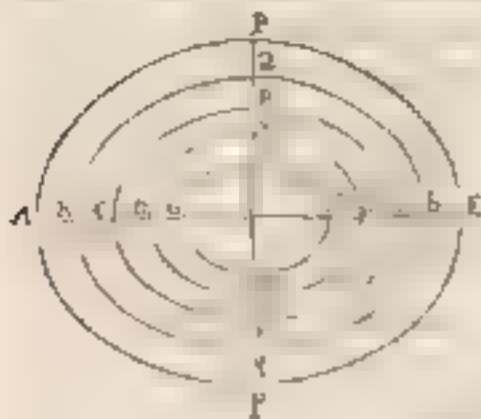


qualis sit Terræ omni $PapAPcpE$,
quæ globo $PapE$ superior est, &
quoniam globus iste est ad Terram
internam superiorem ut $aCqn$. ad $ACqn$
— $aCqn$. id est (cum Terræ diame-
ter minor PC vel aC sit ad diametrum
majorem AC ut 689 ad 692) ut
 4143 ad 474721 seu 1000 ad
 114584 , si annulus iste Terram se-
cundum æquatorem cingeret, & ater-
que simul circa diametrum annuli
revolveretur, motus annuli esset ad motum globi interioris, per
hu-

hujus Lem. II.) ut 4143 ad 474721 & 1000000 ad 925275
 conjunctum, hoc est ut 4143 ad 479248. Ideoque motus annuli
 esset ad summam motuum annuli & globi, ut 4143 ad 443391.
 Unde si annulus globo adhereret, & motum suum, quo ipsius
 Nodi seu puncta æquinoctialia regrediantur, cum globo commu-
 nuer. motus qui restabit in annulo erit ad ipsius motum priorem
 ut 4143 ad 443391; & propterea motus punctorum æquinoctia-
 lium diminuetur in eadem ratione. Erit igitur motus annuus pun-
 ctorum æquinoctialium corporis ex globo & annulo compositus, ad
 motum 20 gr. 11. 46, ut 1436 ad 39343 & 4143 ad 443391
 conjunctum, id est ut 1 ad 2932. Vires autem quibus Nodi Lu-
 narium (ut supra explicui) atque adeo quibus puncta æquinoctia-
 lia annuli regrediantur (ad est vires 3 IT, in Fig pag 444) sunt in
 singulis particulis ut distantia particulam a plano $2R$, & his vi-
 ribus particule illæ planum figunt, & propterea, per Lem I.) si
 materia annuli per totam globi superficiem, in morem figure
 $PapAPepE$, ad superiorem illam Terræ partem consistendam
 spargeretur, vis & efficacia tota particularum omnium ad Terram
 circa quamvis Equatoris diametrum rotandam, atque adeo ad mo-
 vendam puncta æquinoctialia, evaderet quadruplo minor quam prius.
 Ideoque annuus æquinoctionum regressus jam esset ad 20 gr. 11.
 46' ut 1 ad 11728, ac promde fieret 6. 12. 2'. Hæc est præ-
 cessio Equinoctionum a vi Solis oriunda. Vis autem Lunæ ad
 mare movendum erat ad vim Solis ac 6, ad 1, & hæc vis pro quan-
 titate sua augetur etiam præcessionem Equinoctionum. Idcirco
 præcessio illa ex utraque causa oriunda jam fiet major in ratione
 7, ad 1, & sic erit 45. 24. 15". Hic est motus punctorum æqua-
 noctialium ab actionibus Solis & Lunæ in partes Terræ, quæ glo-
 bo $Pape$ incumbunt, oriundas. Nam Terra ab utroque illis
 in globum ipsam exercens nullam in partem inclinari potest.

Designet jam $APep$ corpus Terræ figura 1^a præca prædicta, &
 ex illi formi materia constans. Et si distinetur eadem in regu-
 ras innumeras Lli præcas concentricas & concentricas, $APep$, BQb ,
 C & c.

(*Rer*, *DSds*, &c. quorum diametri sint in progressionē Geometricā: quoniam figuræ continuæ sunt, vires Solis & Lunæ, quibus puncta æquinoctialia regrediuntur, efficerent ut figurarum reliquarum seorsim spectatarum puncta eadem æquinoctialia eadem



cum velocitate regrederentur. Et par est ratio motus orbium singulorum *AQEq*, *BRbr*, *CScs*, &c. qui sunt figurarum altarum differentiarum. Orbis uniuscuiusque, si solus esset, puncta æquinoctialia eadem cum velocitate regredi deberent. Nec refert utrum orbis quilibet densior sit an rarior, si modò ex materia uniformiter densa confletur. Unde

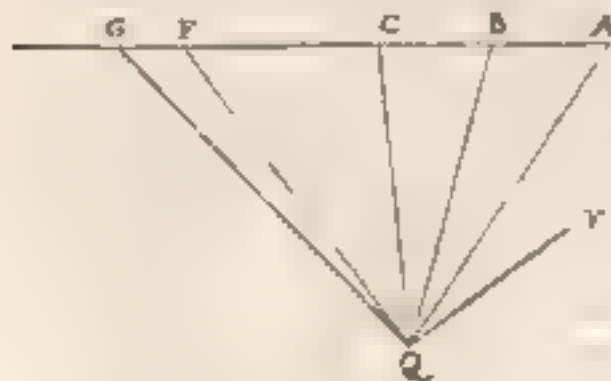
etiam si orbis ad centrum densiores sint quam ad circumferentiam, idem erit motus æquinoctiorum Terræ totius ac prius; si modo orbis uniuscuiusque seorsim spectatus ex materia uniformiter densa conflet, & figura orbis non mutetur. Quod si figuræ orbium mutantur, Terræque ad æquatorem *AE*, ob densitatem materię ad centrum, iam altius ascendat quam prius, regressus æquinoctiorum ex aucta altitudine augebitur, idque in orbibus singulis seorsim existentibus, in ratione maioris altitudinis materię iuxta orbis illius æquatorem, in Terra autem tota in ratione maioris altitudinis materię iuxta æquatorem orbis non extremi *AQEq*, non interni *Gg*, sed mediocrius alicuius *CScs*. Terram autem ad centrum densiorem esse, & propterea sub Æquatore altiore esse quam ad polos in maiore ratione quam 692 ad 689, in superioribus innuimus. Et ratio maioris altitudinis colligi fere potest ex maiore diminutione gravitatis sub æquatore, quam quæ ex ratione 692 ad 689 consequi debeat. In cellis longitudinis penduli, quod in Insula *Gorce* & in *Isula Cayenne* minutis singulis secundis oscillatur, supra longitudinem Penduli quod *Parisius* eodem tempore oscillatur, a

Gallis

Lemma IV.

Cometas esse Lunâ superiores & in regione Planetarum versari.

Ue defectus Parallaxeos diurnæ extulit Cometas supra regiones sublimares, sic ex Parallaxi annua convincitur eorum descensus in regiones Planetarum. Nam Cometæ qui progrediuntur secundum ordinem signorum sunt omnes, sub exitu apparitionis, aut soluti tardiores aut retrogradi, si Terra est inter ipsos & Solem; ac iusto celeriores si Terra vergit ad oppositionem. Et e contra, qui pergunt contra ordinem signorum sunt iusto celeriores in fine apparitionis, si Terra velatur inter ipsos & Solem; & iusto tardiores vel retrogradi si Terra sita est ad contrarias partes. Contingit hoc maxime ex motu Terræ in vario ipsius situ, peninde ut fit in Planetis, qui, pro motu Terræ vel conspirante vel contrario, nunc retrogradi sunt, nunc tardius moveri videntur, nunc verò celerius. Si Terra pergat ad eandem partem cum Cometa, & motu angustiori circa Solem celerius tertur, Cometa e Terra spectatus, ob motum suum tardiores, apparet esse retrogradus; sin Terra tardius tertur, motus Cometæ, (detracto motu Terræ) fit saltem tardior. At si Terra pergat in contrarias partes, Cometa exinde velocior apparet. Ex acceleratione autem vel retardatione vel motu retro-



grado distantia Cometæ in hunc modum colligitur. Sinto rQA , rQB , rQC observatæ tres longitudines Cometæ, sub initio motus, sitque rQF longitudo ultimò observata, ubi Cometa videri desinit. Agatur recta ABC , cuius partes AB , BC rectis QA & QB ,

æquæ longitudini Cometæ & loco γ spectati, & angulus T° paralaxis erit quæ oritur a translatione Terræ de loco γ in locum T ac ponde T locus erit Cometæ in plano Eclipticæ. Hic autem locus V orbe Jovis inferior esse solet.

Idem colligitur ex curvatura viæ Cometarum. Pergunt hæc corpora præmodum in circuitu maxime quando in æventu æterni, ac in hac æterni, non motus apparentis pars ma quæ a paralix erit præterea habet proportionem ad motum totum apparentem, discedere sicut ab his et ceteris, & quoties Terra non videtur in tantam partem dante in partem contrariam. Oritur hæc deflexio maxime ex Paralaxi, propterea quod respondet motui Terræ, & tangens eam quantitas meo computo collocavit dispartentes Cometas latius infra Jovem. Unde consequens est quod in Perigæis & Perihæis, ubi propius adhuc, descendunt sæpius infra orbes Martis & æternorum Planetarum.

Confirmatur etiam propinquitas Cometarum ex luce capiti. Nam corporis celestis a Sole illustrati & in regiones longinquas abeuntis diminuitur splendor in quadruplicata ratione distantie in duplura ratione vacillet ob auctam corporis distantiam a Sole, & in a quadruplicata ratione ob diminutam diametrum apparentem. Unde si de ut & lucis quantitas & apparentis diameter Cometæ, dabitur æstima, dicendo quod distantia sit ad distantiam Planetæ ut radius æternæ diametri ad diametrum directæ & ratione dimidiata lucis ad lucem inverse. Sic minima Capiti Cometæ anni 1682 diameter, per Tubum opticum sexdecim pedum a *Le Flam-* *st* obervata & micrometro mensurata, æquabat 20. Nucleus autem seu ita in medio capitis vix decimam partem latitudinis huius occupabat, adeoque lata erat tantum 11 vel 12. Luce vero & claritate capitis comparabili caput Cometæ anni 1680, stellasque primæ vel secundæ magnitudinis æqualabatur. Ponamus Saturnum cum annulo suo quasi quadruplo lucidorem fuisse & quoniam lux æternæ præmodum æquabat lucem globi intermedii, & diameter apparentis globi sit quasi 21, adeoque lux globi & anni con-

conantem requirit lucem globi, cuius diameter esset 30' et
 distantia Comae & ad distantiam Saturni ut 1 ad 4 inverse, & 12
 ad 30 directe, id est ut 24 ad 30 ita 4 ad 5. Rursus Comae a
 anni 1665 mensis Apr., ut Apr. or est *Herschel*, claritate sua pene
 fixas omnes superbat, quoniam ipse in Saturnum, ratione colo-
 ris videlicet longe vivatioris. Quippe & dicitur hic Cometa a-
 vero illo, qui in hunc anni praecedens apparerat & cum se in pri-
 mae magnitudinis conterebatur. Latitudo capitis erat quilibet 6' ac
 nucleus cum Planetis ope Tubi optici collatus, plane minor erat
 Jove, & nunc minor corpore intermedio Saturno, tunc ipse qua-
 lis judicabatur. Porro cum diameter Capitis Cometae in radiis
 superet 8 vel 12, diameter vero Nuclei seu stellae centralis sit
 quasi decima vel forte decima quarta pars diametri capitis, patet
 Stellas hasce ut plurimum eandem esse apparentem magnitudinem
 cum Planetis. Unde cum lux eorum cum luce Saturni non raro
 contendit possit, eamque aequantio superet. manifestum est quod
 Cometae omnes in Perihelis vel intra Saturnum circumferantur,
 vel non longe supra. Errant igitur toto caelo qui Cometae in re-
 gionem fixarum prope allegant. quia certe ratione non magis il-
 lustrari deberent a Sole nostro, quam Planetae, qui circumferuntur,
 a stellis fixis.

Hae disputavimus non considerando obscuritatem Cometa-
 rum per tumentiam illam maxime copiosam & crassam, quae eorum
 circumdatur, quasi per nubem obtuse semper lucens. Nam quoniam
 eo obscurius redatur corpus per hunc tumorem tanto propius ad
 Solem accedat necesse est, ut copia lucis a se reflexa Planetas aequa-
 letur. Inde verisimile fit Cometae longe intra Sphaeram Saturni
 descendere, uti ex Paralaxi probavimus. Item vero quam ma-
 xime confirmatur ex Caudis. Haec vel ex reflexo lumine ipsi per
 aethera, vel ex luce capitis emanant. Proinde cum in tumentia
 distantia Cometarum, ne tamus a Capite se separandi per ipsos
 omnis amplia incretibili cum velocitate & expansione propriam
 in posteriore referenda est lux omnia non a se a Capite ipsorum

Nucleum capituli. Igitur si imaginem lucem hanc omnem congregari & terram deam Nuclei coarctari, Nucleus ille jam terre, quod est causam maximam & turbam mentem emittit, Jovem ipsam splendorem suo in modum superat. Minore igitur cum diametro apparente plus lucis emittens, multo magis illustrabitur a Sole, adeoque erit Sol multo propior. Quinetiam capita sub Sole delibentia, & vixit cum maximas tam facient illas multas trabem ignitatem nonnullam emittentia, eodem argumento infra orbem Veneris collocari deont. Nam lux illa omnis si in stellam congregari supponatur, ipsam Venerem ne dicam Veneres pares conunctas quandoque superaret.

Idem denique colligitur ex luce capitum crescente in recessu Cometarum a Terra Solem versus, ac decrecente in eorum recessu a Sole versus Terram. Sic enim Cometa posterior Anni 1665 (obseruante *Hervius*), ex quo compit caput, remittebat temper de motu suo, adeoque peruenit Perigæum, Splendor vero capituli nihil minus sedes crecebat, usque diu Cometa radas Solaribus obiectus deinde apparere. Cometa Anni 1683, observante eodem *Hervius*, in fine Mensis Julii ad primum conspectus est, tardissime movebatur, nunquam prima 40 vel 45 circiter singulis diebus in orbe suo conficiens. Ex eo tempore motus ejus diutius perpetuo agebatur usque ad Sept. 4. quando evasit graduum quatuordecim. Igitur toto hoc tempore Cometa ad Terram appropinquabat. Id quod etiam ex diametro capituli micrometro mensurata colligitur. Quippe quam *Hervius* reperit Aug. 6. esse tantum 6.5 in celsa comae, at Sept. 2. esse 9.7. Caput igitur initio longe minus apparuit quam in fine motus, at initio tamen in vicina Solis longe remotius exstitit quam circa finem, ut refert idem *Hervius*. Proinde toto hoc tempore, ubi recedum ipsius a Sole, quoad lumen decrevit, non obstantia accessu ad Terram. Cometa Anni 1618 circa medium Mensis Decembris, & iste Anni 1680 circa finem eisdem Mensis, ceterum movebantur, adeoque tunc erant in Perigæis. Verum splendor maximus capituli contigit ante duas fere sep-

septimanas, ubi modo exierant de radius Solanibus; & splendor maximus caudarum paulo ante in maiore vicinitate Solis. Caput Cometæ prioris, juxta observationes *Cysati*, *Decem.* 1. magis videbatur stellæ primæ magnitudinis, & *Decem.* 16. (jam in Perigæo existens) magnitudine parum, splendore seu claritate luminis plurimum defecerat. *Jan.* 7. *Keplerus* de capite incertus finem fecit observandi. Die 12 mensis *Decembris* conspectum & a *Transito* observatum est caput Cometæ posterioris, in distantia novem graduum à Sole, id quod stellæ tertiæ magnitudinis vix concessum fuisset. *Decem.* 15 & 17 apparuit idem ut stellæ tertiæ magnitudinis, diminutum utique splendore Nubium juxta Solem occidentem. *Decem.* 26. velocissime motus, inque Perigæo propemodum existens, cedebat ori Pegasi, stellæ tertiæ magnitudinis. *Jan.* 3. apparebat ut Stellæ quartæ, *Jan.* 9. ut Stellæ quintæ, *Jan.* 13. ob splendorem Lunæ crescentis disparuit. *Jan.* 25. vix æquabat Stellæ magnitudinis septimæ. Si luminaria æqualia à Perigæo hinc inde tempora, capita quæ temporibus illis in longinquis regionibus posita, ob æquales à Terra distantias, æqualiter lucere debuissent, in plaga Solis maxime splenduerunt, ex altera Perigæi parte evanescere. Ignoratur ex magna lucis in utroque situ differentia concludi ut magna Solis & Cometæ vicinitas in situ priore. Nam lux Cometarum regularis esse solet, & maxima apparere ubi capita velocissime moventur, atque adeo sunt in Perigæis, nisi quatenus ea minor est in vicinia Solis.

Corol. 1. Splendent igitur Cometæ luce Solis à se reflexa.

Corol. 2. Ut dictis etiam intelligitur cur Cometæ non opere frequentant regionem Solis. Si cernerentur in regionibus longe ultra Saturniam deberent sæpius apparere in partibus Solis oppositis. Erant enim Terræ veteres qui in his partibus verterentur, & Sol interpositus occultaret cæteros. Verum percurriendo hanc Cometarum repertum quod quadruplo vel quinquaplo patet ceteris in Hemisphærio Solem veritas quam in Hemisphærio opposito, præter

minuunt in descensu ad regiones nostras neque caudas emittunt, neque adeo illustrantur a Sole, ut nudis oculis se prius detegendos exhiberint, quam sint ipso Jove propiores. Spatiu autem tantillo intervallo circa Solem descripti pars longè major sita est à latere Terræ quod Solem respicit, inque parte illa majore Cometæ non ut primum venientes magis illuminari solent.

Corol. 3. Hinc etiam manifestum est, quod coeli resistentia destituantur. Nam Cometæ vias obliquas & nonnunquam cursui Planetarum contrarias secuti, moventur omnifariam liberrime, & motus suos etiam contra cursum Planetarum distulsiue conservant. Fallor si genus Planetarum sint, & motu perpetuo in orbem redeant. Nam quod scriptores aliqui Meteora esse volunt, argumentum à capitum perpetuis mutationibus ducentes, fundamento carere videatur. Capita Cometarum Atmosphæris ingentibus cinguntur, & Atmosphære interne densiores esse debent. Unde nubes sunt non ipsa Cometarum corpora, in quibus mutationes illæ videntur. Sic Terræ si e Planetis spectaretur, luce nubium suarum proculdubio opiretetur, & corpus ipsum sub aeris prope delitesceret. Sic cingula Jovis à nubibus Planetæ ipsius formata, situm mutant inter se, & ipsum Jovis corpus per nubes illas deficientes cernitur. Et merito magis corpora Cometarum suo Atmosphæris & profundioribus & crassioribus abicendi debent.

Prop. XL. Theor. XXI.

Cometas in Sectibus conicis umbilicis in centro Solis habentibus moveri, & vias ad, item ductu areas temporibus proportionales describere.

Pater per Corol. 1. Prop. XIII. Libri primi, collatum cum Prop. VIII, XII & XVI. Libri tertii.

Corol. 1. Hinc si Cometæ in orbes redeunt, orbes erunt Elliptici, & tempora periodica erunt ad tempora periodica Planetarum in ratione longiorum transversorum axium. Atque Cometæ maxima

xima ex parte supra Planetas versantes, & eo nomine orbes illius majoribus describentes, tardius revolvantur. Ut si axis orbis Cometæ sit quadruplo major axe orbis Saturni, tempus revolutionis Cometæ erit ad tempus revolutionis Saturni, id est ad annos 30, ut 4 √ 4 (seu 8) ad 1, ideoque erit annorum 240.

Corol. 2. Orbes autem erunt Parabolis adeo finitimi, ut eorum vice Parabolæ absque erroribus sensibilibus adhiberi possint.

Corol. 3. Et propterea, per Corol. 7. Prop. XVI. Lib. I. velocitas Cometæ omnis erit semper ad velocitatem Planetæ cuiusvis circa Solem in circulo revolventis, in dimidiata ratione duplicata distantie Cometæ à centro Solis ad distantiam Planetæ à centro Solis quamproximè. Ponamus radium orbis magni, seu Ellipseos in qua Terra revolvitur semidiametrum transversam, esse partium 100000000, & Terra motu suo diurno mediocri describet partes 1710212, & motu horario partes 71675½. Ideoque Cometa in eadem Telluris à Sole distantia mediocri, ea cum velocitate quæ sit ad velocitatem Telluris ut √ 2 ad 1, describet motu suo diurno partes 2432747, & motu horario partes 101364½. In maioribus autem vel minoribus distantis, motus tum diurnus tum horarius erit ad hunc motum diurnum & horarium in dimidiata ratione distantiarum respectivè, ideoque datur.

Lemma V.

Invenire lineam curvæ generi Parabolice, quæ per data quotcunque puncta transibit.

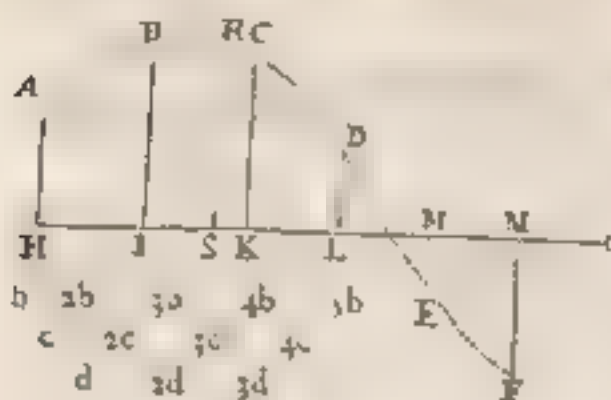
Sunto puncta illa *A, B, C, D, E, F, &c.* & ab eisdem ad rectam quavis positione latam *HN* demitte perpendiculara quocunque *AH, BI, CK, DL, EM, FN.*

Cas. 1. Si punctorum *H, I, K, L, M, N* æqualia sunt intervalla *HI, IK, KL, &c.* collige perpendicularorum *AH, BI, CK &c.* differentias primas *b, 2b, 3b, 4b, 5b, &c.* secundas *c,*

LII

c 2,

2 c, 3 c, 4 c, &c. ternas d, 2 d, 3 d &c. id est, ita ut sit $HA - BI = b$, $BI - CK = 2b$, $CK - DL = 3b$, $DL + EM = 4b$, $-EM + FN = 5b$, &c. den $b - 2b = c$ &c. Deinde erecta



quacunque perpendiculari RS , quæ fuerit ordinata applicata ad curvam quasitam: ut inveniat hujus longitudo, pone intervalla HI , IK , KL , LM , &c. unitates esse, & dic $AH = a$, $-HS = p$, p in $-IS = q$, q in $+SK = r$, r in $+SL = s$, s in $+SM = t$, perpendiculum in ME , & præponendo signa negativa terminis HS , IS , &c. qui jacent ad partes puncti S versus A , & signa affirmativa terminis SK , SL , &c. qui jacent ad alteras partes puncti S . Et signis probe observatis erit $RS = a + bp + cq + dr + es + ft$ &c.

Cas 2. Quod si punctorum H , I , K , L , &c. inæqualia sint intervalla HI , IK &c. collige perpendicularium AH , BI , CK , &c. differentias primas per intervalla perpendicularium divisas b , $2b$, $3b$, $4b$, $5b$, secundas per intervalla b na divisas c , $2c$, $3c$, $4c$, &c. tertias per intervalla ternas divisas d , $2d$, $3d$, &c. quartas per intervalla quaternas divisas e , $2e$, &c. & sic deinceps, id est ita ut sit $b = \frac{AH - BI}{HI}$, $2b = \frac{BI - CK}{IK}$, $3b = \frac{CK - DL}{KL}$ &c. den $c = \frac{b - 2b}{b}$, $2c = \frac{2b - 3b}{b}$, $3c = \frac{3b - 4b}{b}$ &c. Postea $d = \frac{c - 2c}{c}$, $2d = \frac{2c - 3c}{c}$ &c. Inventis differentiis, dic $AH = a$, $-HS = p$, p in $-IS = q$, q in $+SK = r$, r in $+SL = s$, s in $+SM = t$, perpendiculum in ME , & præponendo signa negativa terminis HS , IS , &c. qui jacent ad partes puncti S versus A , & signa affirmativa terminis SK , SL , &c. qui jacent ad alteras partes puncti S . Et signis probe observatis erit $RS = a + bp + cq + dr + es + ft$ &c.

Corol. Hinc atque curvarum omnium inveniri possunt quamproxime. Nam si curvæ cujusvis quadranda inveniantur puncta aliquot,

quot, & Parabola per eadem duci intelligatur. erit area Parabo & hujus eadem quam proxime cum area curvæ illius quadrandæ. Potest autem Parabola per Methodos notissimas semper quadrari Geometricè.

Lemma VI.

Ex observatis aliquot locis Comete invenire locum ejus ad tempus quodvis intermedium datum.

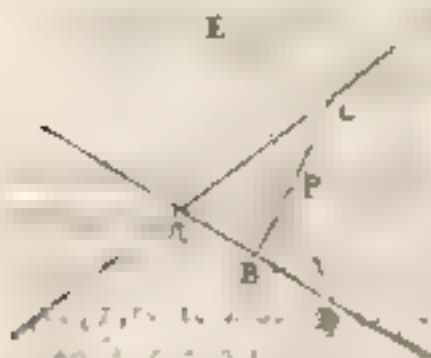
Designent HI, IK, KL, LM tempora inter observationes, (in Fig. præced.) HA, IB, KC, LD, ME , observatas quinque longitudes Comete, HS tempus datum inter observationem primam & longitudinem quæsitam. Et si per puncta A, B, C, D, E duci intelligatur curva regularis $ABCDEF$, & per Lemma superius inveniat RS ejus ordinatum applicata RS , erit RS longitudo quæsitæ.

Eadem methodo ex observatis quinque latitudinibus inveniat latitudo ad tempus datum.

Si longitudinum observatarum parvæ sint differentiæ, puta graduum tantum 4 vel 5, suffecerint observationes tres vel quatuor ad inveniendam longitudinem & latitudinem novam. Sin majores sint differentiæ, puta graduum 10 vel 20, debebunt observationes quinque adhiberi.

Lemma VII.

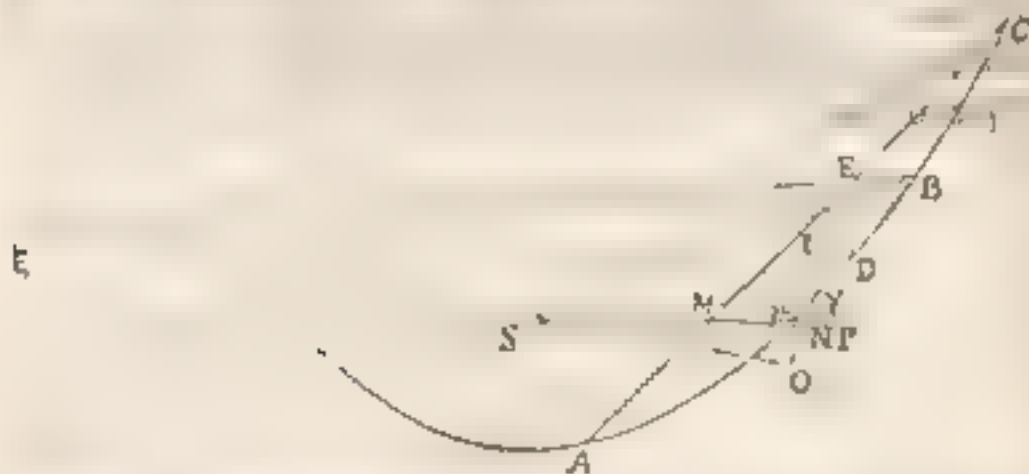
Per datum punctum P ducere rectam lineam BC , cujus partes PB, PC , rectis duabus positione datis AB, AC abscissæ, datam habeant rationem ad invicem.



A puncto illo P ad rectarum alterutram AB ducatur recta quævis PD , & producaturs eadem versus rectam alteram AC usque ad E , ut sit PE ad PD in data illa ratione. Ipsi AD parallela sit EC ; & si agatur CPB , erit PC ad PB ut PE ad PD . Q. E. F.

Lemma VIII.

Sit ABC Parabola umbilicam habens S . Chordâ AC bisectâ in I abscindatur segmentum $ABCI$, cujus diameter sit $I\mu$ et vertex μ . In $I\mu$ productâ capiaturs μO æqualis dimiduo ipsius $I\mu$. Jungatur OS , &



producaturs ea ad ξ , ut sit $S\xi$ æqualis $2 SO$. Et si Cometa B moveatur in arch CBA , & agatur ξB secans AC in E dico quod punctum E abscindet

scindet de chorda AC segmentum AE tempori proportionale quamproximè.

Jungatur enim EO secans arcum Parabolicum ABC in Y , & erit area curvilinea AEY ad aream curvilineam ACY ut AE ad AC quamproximè. Ideoque cum triangulum ASE sit ad triangulum ASC in eadem ratione, erit area tota $ASEY$ ad aream totam $ASCY$ ut AE ad AC quamproximè. Cum autem EO sit ad SO ut 3 ad 1 & EO ad YO prope in eadem ratione, erit SY ipsi FB parallela quamproximè, & propterea triangulum SEB , triangulo YEB quamproximè æquale. Unde si ad aream $ASEY$ addatur triangulum EYB , & de summa auferatur triangulum SEB , manebit area $ASBY$ areæ $ASEY$ æqualis quamproximè, atque adeo ad aream $ASCY$ ut AE ad AC . Sed area $ASBY$ est ad aream $ASCY$ ut tempus descripti arcus AB ad tempus descripti arcus totius. Ideoque AE est ad AC in ratione temporum quamproximè. *Q. E. D.*

Lemma IX.

Rectæ $I\mu$ & μM & longitudo $\frac{Atc}{Adm}$ æquantur inter se. Nam $4S\mu$ est latus rectum Parabola pertinet ad vertexem B .

Lemma X.

Si producat $S\mu$ ad N & P , ut μN sit pars tertia ipsius μI , & SP sit ad SN ut SN ad $S\mu$. Cometa quo tempore describit arcum $A\mu C$, si progredieretur ea semper cum velocitate quam habet in altitudine ipsi SP æquiva, describeret longitudinem æqualem chordæ AC .

Nam si velocitate quam habet in μ , eodem tempore progredietur uniformiter in recta quæ Parabolam tangit in μ , area quam Radio ad punctum S ducto describeret, æqualis esset areæ Parabolæ $AS\mu$. Ideoque contentum sub longitudine in Tangente descripta.

Lemnia novissimum) describet chordam AC , adeoque eodem tempore in circulo cujus semidiameter esset SP revolvendo, describeret arcum cujus longitudo esset ad arcus Parabolici chordam AC in dimidiata ratione unius ad duo. Et propterea eo cum pondere quod habet in Solem in altitudine SP , cadendo de altitudine illa in Solem, describeret eodem tempore (per Scholium Prop. IV. Lib. I) spatium æquale quadrato semissæ chordæ illius applicato ad quadruplun altitudinis SP , id est spatium $\frac{A^2 P^2}{4}$. Unde cum pondus Cometæ in Solem in altitudine SN sit ad ipsius pondus in Solem in altitudine SP , ut SP ad $S\mu$: Cometa pondere quod habet in altitudine SN eodem tempore, in Solem cadendo, describet spatium $\frac{A^2 \mu^2}{4}$ id est spatium longitudini $I\mu$ vel $M\mu$ æquale. *Q. E. D.*

Prop. XLI. Prob. XX.

Cometæ in Parabola moventis Trajectoriam ex datis tribus observationibus determinare.

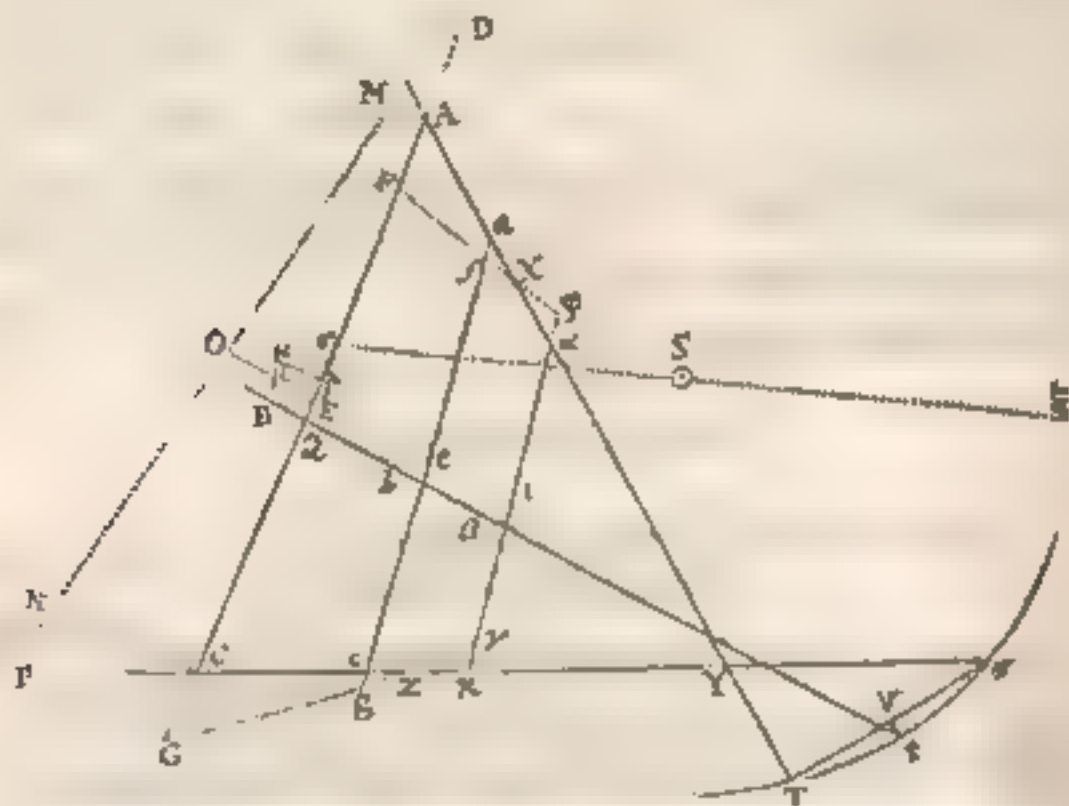
Problema hocce longe difficillimum multimodè aggressus, composui Problemata quædam in Libro primo quæ ad ejus solutionem spectant. Postea solutionem sequentem paulo simpliciorē exco- gitavi.

Seligantur tres observationes æqualibus temporum intervallis ab invicem quamproxime distantes. Sit autem temporis intervallum illud ubi Cometa tardius moveatur paulo majus altero, ita videlicet ut temporum differentia sit ad summam temporum ut summa temporum ad dies plus minus sexcentos. Si tales observationes non præsto sint, inveniendas est novus Cometæ locus per Lemma

Designent S Solem, T, t, τ tria loca Terræ in orbe magno, $TA, tB, \tau C$ observatas tres longitudes Cometæ, P tempus inter observationem primam & secundam, II tempus inter secundam ac

ter-

tertiam, \times longitudinem quam Cometa toto illo tempore ex eum
 velocitate quam habet in mediocri Telluris a Sole distantia, descri-
 bere posset, & \perp perpendicularum in chordam Tr . In longitudine
 media $\perp B$ sumatur utcumque punctum B , & inde versus Solem S



ducatur linea BE , quæ sit ad Sagittam $\perp V$ ut contentum sub $S B$ &
 $S \perp$ quadrato ad cubum hypotenuse trianguli rectanguli, cuius latera
 sunt $S B$ & tangens latitudinis Cometæ in observatione secunda ad
 radium $\perp B$. Et per punctum E agatur recta AEC , cuius partes AE ,
 EC ad rectas TA & TC terminatæ, sint ad invicem ut tempora V
 & W : Tum per puncta A, B, C , duc circumferentiam circuli, eam-
 que biseca in i , ut & chordam AC in l . Age occultam S , secantem
 AC in λ , & comple parallelogrammum $l\lambda\mu$. Cape $l\sigma$ æqualem
 $\frac{2}{3} l\lambda$, & per Solem S age occultam $\sigma \xi$ æqualem $\frac{2}{3} S\sigma + \frac{1}{3} l\lambda$. Et
 delevis jam literis A, E, C, l , à puncto B versus punctum ξ duc oc-
 cultam

cultam novam BE , quæ sit ad priorem BE in duplicata ratione distantie BS ad quantitatem $S\mu + \frac{1}{2}$. Et per punctum E retrahat rectam AEC eadem lege ac prius, id est, ita ut eius partes AP & EC sint ad invicem ut tempora inter observationes, F & H .

Ad AC ductam in I erigantur perpendicularia AM , & N , IO , quantum AM & CN sint tangentes latitudinum in observatione prima ac tertia ad radios TA & τa . Jungantur MN secans IO in O . Constituaturs rectangulum $IL\mu$ ut prius. In IA producta capiatur ID æqualis $S\mu + \frac{1}{2}$, & agatur occulta OD . Deinde in MN versus N capiatur MP , quæ sit ad longitudinem supra inventam X in dimidiata ratione mediocris distantie I elaris a Sole (seu h. m. diametri orbis magni) ad distantiam OD . Et in AC capiatur (ut ipsi NP æqualis, ita ut puncta G & P ad eadem partes rectæ NC jaceant.

Eadem methodo qua puncta F , A , C , G , ex assumpto puncto B inventa sunt, inveniantur ex assumptis utcumque punctis u , a , b & β puncta nova e , a , c , g , & $\tau a \times \tau$. Deinde si per e , g & τa ducatur circumferentia circuli efg secans rectam τc in \angle & \angle , & \angle & \angle eius Cometæ in plano I elipseæ. Et si in AC , ae , & ag , capiatur AF , af , & ϕ ipsi CG , cg , & τ respective æquæ, & per F , f , & ϕ ducatur circumferentia circuli $f\phi g$ secans rectam τc in \angle & \angle , & \angle & \angle erit punctum X alius Cometæ locus in plano I elipseæ. Ad puncta X & Z eriguntur tangentes latitudinum Cometæ distantie IX & τZ , & habebuntur loca duo Cometæ in orbis peripetio. Deinde (per Prop. XIX. Lib. I) tangentes S , per loca X & Z ducantur, & hæc erit Trajectoria Cometæ QPR .

Constitutionis hujus demonstratio ex Lemmâ breviora equatur quæppe cum recta AC secetur in E in ratione temporum, per Lemmâ Vill: & BE per Lem. XI sit pars rectæ BS in plano Eclipticæ arcui ABC & chordæ AEC intercepta, & MP (per Lem. VII) longitudo sit chordæ arcus, quem Cometa in orbe proprio inter observationem primam ac tertiam distans a Sole, itaque per MN æqualis fuerit, si modo B sit verus Cometæ locus in plano Eclipticæ.

M m m

Ca

Ceterum puncta B, b, β non quolibet, sed vero proxima eligere convenit. Si angulus AQ in quo vestigium orbis in plano Eclipticæ descriptum incidit rectam tB præterpropter innodicat, in angulo illo ducenda erit recta occulta AC , quæ sit ad Tt in data ratione S t ad SQ . Et agendo rectam SEB cuius pars EB æquetur longitudini Vt , determinabitur punctum B quod primæ vice uti sperare licet. Tum recta AC deletâ & secundam præcedentem constitutionem iterum ducta, & inventâ insuper longitudine MP , in tB capiatur punctum b , ea lege, ut si IA, TC semel non locuerint in t , ut distantia tb ad distantiam tB in ratione composita ex ratione MX ad MP & ratione dimidiata bB ad Sv . Et eadem methodo inveniendum erit punctum tertium β ; si modo operationem tertio repetere lubet. Sed hac methodo operationes duæ ut primum suffecerint. Nam si distantia Bb perexigua obveniat, postquam inventa sunt puncta F, f & G, g , actæ rectæ Ff & Gg incidunt TA & tC in punctis quælibet X & Z .

Exemplum.

Proponatur Cometa ann 1680. Hujus motum à Flamsteed observatum Tabula sequens exhibet.

Motions Transient										Long Cometa, Lat Cometa					
1680	December	12	4	46	4	45	0	17	1	57	1	4	16	0	
		1	0	32	12	40	59	11	h	40	28	5	7	38.23.49.30	
		24	0	12	0	17	57	14	7	49	15	47	0	5	23.24
		26	5	13	5	20	24	1	1	46	28	14	6	17.00.57	
		29	7	55	7	03	2	19	20	54	23	11	4	126.10.09	
		31	4	2	5	10	26	20	22	20	17	37	5	28.13.12	
1681	January	1	5	51	5	1	7	2	23	14	5	47	5	27	15.26
		9	0	49	0	0	5	0	29	54	15	5	15	14	12.42
		11	5	33	0	6	10	7	25	33	20	40	57	21.44	00
		14	0	46	0	5	55	4	34	0	25	59	34	12	17.10
		23	0	43	0	54	7	16	45	55	0	9	55	24	16.5
		31	8	07	8	21	5	21	50	9	113	19	26	16.40.57	
1681	February	1	0	23	0	24	5	24	47	4	15	13	45	6	02.02
		2	0	50	0	41	7	25	49	5	0	54	32	5	27.23

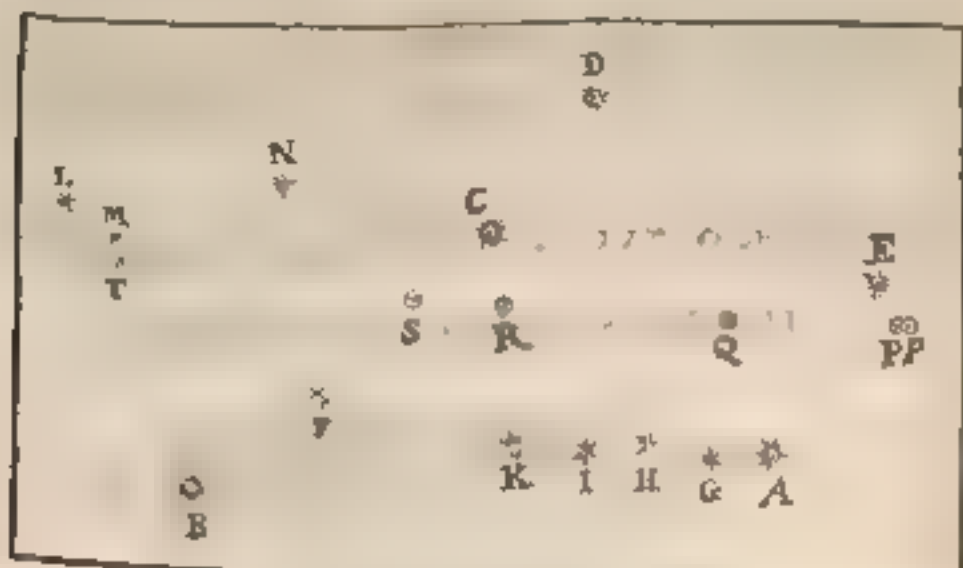
In his observationibus *Flamstedus* eâ usus est diligentia, ut postquam bis observasset distantiam Cometæ à Stella aliqua fixa, de inde etiam distantiam bis ad alia stella fixa, rediret ad stellam priorem & distantiam Cometæ ad eadem iterum observaret, idque bis, ac de inde ex distantia illius incremento vel decremento temporis proportionali colligeret distantiam tempore intermedio, quando distantia à stella altera observabatur. Ex hujusmodi observationibus loca Cometæ testinanter computata *Flamstedus* primo cum amicis communicavit, & postea eandem ad examen revocatis oculis diligentiore correxit. Nos loca correctâ hic descripsimus.

His adde observationes quasdam e nostris.

		Tempus	Cometæ Longit.	Latit.
Febr.	14	57 3	26 59 22	12 17
	27	58 13	27 4 24	12 17
Mart.	1	11 0	27 63 6	12 24
	2	8 0	28 12 29	12 29
	5	11 35	29 23 51	12 2
	9	8 30	30 42 2	11 44

Hæ observationes Telescopio septupedalî, & Micrometro fixâque in foco Telescopii locatus parætax sunt: quibus instrumentis & positiones fixarum inter se & positiones Cometæ ad fixas determinavimus. Designet *A* stellam in sinistro calcaneo Pezzeri (*Bayro* 6) *B* stellam sequentem in sinistro pede (*Bayro* 7) & *C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N* stellas alias minores in eodem pede. Sinque *P, Q, R, S, T* loca Cometæ in observationibus supra descriptis & existente distantia *AB* partium 80, erat *AC* partium 52, *BC* 58, *AD* 57, *BD* 82, *CD* 23, *AE* 29, *CE* 57, *DE* 47, *AK* 38, *BK* 43, *CK* 31, *FK* 29, *FB* 23, *FC* 36, *AH* 18, *DH* 53, *BN* 46, *CN* 31, *BL* 45, *NL* 31. *LM* erat ad *LB* ut 2 ad 9 & producta transibat per stellam *H*. His determinabantur positiones fixarum inter se.

Die Veneris Feb. 25. Sc. vet. Hor. 8ⁱ P. M. Cometæ in p existens distantia à stella E erat major quam $\frac{1}{2} AE$, minor quam $\frac{3}{4} AE$, adeoque æqualis $\frac{1}{4} AE$ proxime, & angulus ApE nonnullus



obtusius erat, sed fere rectus. Nempe si demitteretur ad pE perpendicularum ab A , distantia Cometæ à perpendicularo illo erat $\frac{1}{4} pE$.

Eadem nocte, horâ 9ⁱ, Cometæ in P existentis distantia à stella E erat major quam $\frac{1}{4} AE$, minor quam $\frac{3}{4} AE$, adeoque æqualis $\frac{1}{4} AE$, seu $\frac{1}{4} AE$ quamproxime. A perpendicularo autem à Stella A ad rectam PE demisso distantia Cometæ erat $\frac{1}{4} PE$.

Die 1^a, Mart. 1, hor. 11. P. M. Cometa in R existens, stellis K & C accurate interjacebat, & rectæ CRK pars CR paulo major erat quam CK , & paulo minor quam $CK + \frac{1}{2} CR$, adeoque æqualis $\frac{1}{2} CK + \frac{1}{4} CR$ seu $\frac{3}{4} CK$.

Die 2^a, Mart. 2 hor. 8 P. M. Cometæ existentis in S , distantia à stella C erat $\frac{1}{2} SC$ quamproxime. Distantia stellæ F a recta CS producta erat $\frac{1}{2} SC$, & distantia stellæ B ab eadem recta erat quintuplo major quam distantia stellæ F . Item recta NS producta tran-

transibat inter stellas *H* & *I* quantuplo vel sextuplo propior existens stellæ *H* quam stellæ *I*.

Die 4^{ta}, Mart. 5. hor. 11^{1/2}. P M Cometa existente in *T*, recta *MT* æqualis erat, *ML*, & recta *LT* producta transibat inter *B* & *F*, quadruplo vel quintuplo propior *F* quam *B*, auferens a *BF* quintam vel sextam ejus partem versus *F*. Ut *MT* producta transibat extra spatium *BF* ad partes stellæ *B*, quadruplo propior existens stellæ *B* quam stellæ *F*. Erat *M* itella perexigua quæ per Telescopium videri vix potuit, & *L* stella minor quæ magnitudine octavæ.

Ex hujusmodi observationibus per constructiones figurarum & computationes (posito quod stellarum *A* & *B* distantia esset 2 gr. 6^{1/2}, & stellæ *A* longitudo 26 gr 41. 48 & latitudo borealis 12 gr 8^{1/2}, stellæque *B* longitudo 28 gr 40 16 & latitudo borealis 11 gr. 17^{1/2}, quemadmodum a *F. m. J. d.* observatas accep) derivabam longitudes & latitudes Comete. Micrometro parum affabre constructo usus sum, sed Longitudinum & Latitudinum errores (quatenus ab observationibus nostris evadunt) dimidium minuti unius primi vix superant, præterquam in observatione ultimâ Mart 9. cui positiones figurarum ad stellas *A* & *B* minus accurate determinare potui. Cuiusmodi qui Cometam eodem tempore observavit, e declinationem ejus tanquam invariantem invariantem parum differens defensus est. Nam Cometa (juxta observationes nostras) in fine mensis sui notabiliter deflectere cepit boream versus, a parallelo qui in fine Mensis *Februarii* tenebat.

Jam ad orbem Comete determinandum, sequenti observationibus hactenus descriptis, quas *Flemstedius* tribuit Dec 21, Jan 5 & Jan. 25, Ex his inveni *Sp. par* 9842, & *P. par* 11455, quales 10000 sunt semidiameter orbis magni. Tum ad op. 1^{am} nem primam assumendo *t. B* partem 3057, inveni *B* 9^{1/2}, *BF* prima vice 412. *Sp.* 9503 12 413 *BF* secunda vice 421, *OD* 10186, *X* 8528, *MP* 8450, *MA* 8455, *NP* 25. Unde ad operationem secundam collegi distantiam *t. b* 5640. It

per hanc operationem inveni tandem distantias TX 4775 & Z 11322. Ex quibus orbem definendo inveni Nodos ejus in α & ν 1 gr. 53, inclinationem plani ejus ad planam Eclipticæ 61 gr. 20, veritatem ejus (si pericheliæ Cometæ) in m 27 gr. 43, cum latitudine australi 7 gr. 34, & eius latus rectum 236, areamq; radio ad Solem ducto singulis diebus descriptam 93585. Cometam vero Novemb. 8 d. ob. 4. P. M. in vertice orbis seu perichelio tantæ. Hæc orbis, & per totam partem æqualem & chordas angulorum ex Tab. II. Simulæ naturalium cometæ determinavi graphice, construendo Schema satis amplum, in quo videlicet semidiameter orbis imaginis (partium 10000) æqualis esset digitis 16, pedis Anglicani.

Tandem ut constaret an Cometa in Orbe sic invento vere moveretur, collegi per operationes partim Arithmeticas partim Graphicas, loca Cometæ in hoc orbe ad observationum quarundam tempora, ut in Tabula sequente videre licet.

COMETÆ

		Long. Obs.	Lat. Obs.	Differ. Long.	Differ. Lat.
Decemb.	12	27 52	7 0	5 15	9 6
	29	28 3	12 5	13 1	10 4
Febr.	9	28 9	17 2	10 9	12 2
Mar.	9	28 37	29 19	12 4	29 20

Præterea cum *O. Flamsteed* Cometam, qua Mense Novembri apparuerat, eundem esse cum Cometa mensium subsequente, hinc ad me datus ut quando disputaret, & Trajectoriam quandam ab orbe hujus Parabolæ non longe aberrantem delinearet, visi in est loca Cometæ in hoc orbe Mense Novembri computare, & cum Observationibus conferre. Observationes ita se habent.

Nov. 17. St. Ver. *Pontæus* & alii hora sexta matutina *Romæ*, (id est hora 5 10 *London*) Cometam observant in α 8 gr. 30 cum latitudine Australi 0 gr. 40'. Extant autem eorum observationes in tractatu quem *Pontæus* de hoc Cometa in lucem edidit. Eadem horâ *Gassendi* etiam *Romæ*, Cometam vidit in α 8 gr. sine Latitudine.

Nov.

Nov. 18. *Pontæus* & *Socii* hor. matutina 6 30 *Tome* 11. hor.
5 40 *London* Cometa vidit in medijs Stellarum duarum pri-
varum, quarum una medius est in recta linea in *Virginis* *Auriga*
li manu, & altera est extrema α . Unde Cometa tunc fuit in
12 gr 46 cum Lat. Austr. 50. Eodem die *B. Pontæus* in *Anglia*
in Lat. 42', horâ quinta matutina id est *London* hora Mat 9)
Cometa visus est in, = 14 circiter, cum Lat. Austr. 1 gr 30, hora
Cl. Halleus accepit.

Nov. 19. hora Mat 4' *Cont. Burgæ*, Cometa observante javene
quodam) distabat à Spica = quali 2 gr. *Beneaz* prope *Villas*.
Eodem die hor. 5. Mat *Boston* in *Nova* *Anglia* Cometa distabat à
Spica in gradu uno, differentia latitudinum existente 40, atque adeo
differentia Long. 44 circiter. Unde Cometa erat in 18 gr 40
cum Lat. Austr. 1 gr. 19. Eodem die *D. Arthurus* *Socii* ad *Flu-*
um Patuxent prope *Hunting Creek* in *Mary Land*, in *Constantia* *Virge-*
nia in Lat. 38 gr hora quinta matutina id est hora 10 *London*)
Cometam vidit supra Spicam & cum Spica propemodum con-
tuum, existente distantia inter eisdem quali 1 gr. *Observator* *Gem*,
eadem horâ die sequentis, Cometam vidit quali 2 gr. distans
Spicâ. Congruent hæc observationes cum observationibus in *Nova*
Anglia factis, si modo distantiæ (pro motu d. Comete). non-
nihil augeantur, nam ut Cometa die prior superior esset Spicæ in ali-
tudine 52 circiter, ac die postenore inferior eadem stellâ altitudine
perpendiculari 2 gr 40

Nov. 20. *D. Monneratus* *Astronomix* *Profr* hor. *Paris* sexta
Matutina, *Veneris* (id est hora 5 10 *London*) Cometa vidit
in 23 gr. cum Lat. Austr. 1 gr 30. *London* de *B. Pontæus* distabat
Cometa à Spica in, 4 gr. long. talis in ora *London*, atque erat in =
23 gr. 24 circiter.

Nov. 21. *Pontæus* & *Socii* hor. mat. 7' Cometa observante
in = 27 gr. 30 cum Latitudine Australi 1 gr. 16. *Anglo* ho-
quart.

qⁱ intâ mat. in ~ 27 gr. 45. *Montenarus* in ~ 27 gr. 51'. Eodem die in latulâ *Juncâ* visus est prope p. nupiam *Scorpi*, eandemque circiter latitudinem habuit cum *Spica Virginis*, id est 1 gr. 59.

Novem. 22 Visus est a *Montenaro* in m 2". 33. *Bostonia* autem in *Novâ Angliâ* apparuit in m 3 gr. circiter, eadem fere cum latitudine ac prius.

Deinde visus est a *Montenaro* *Novem. 24.* in m 12 gr. 52' & *Nov. 25* in m 17 gr. 45. Latitudinem *Gallienus* jam ponit 2 gr. Eandem *Ponthaus* & *Gallienus* decreville, *Montenarus* & *Ango* semper creville testantur. Crassæ sunt horum omnium observationes, sed ex *Montenari*, *Angoni* & observatoris in *Nova Angliâ* præferendæ videntur. Ex omnibus autem inter se collatis, & ad meridiem *London*, hora mat. 5 10 reductis, colligo Cometam hujusmodi cælum qⁱ amproxime descripsisse.

	Long Com.	Lat. Com.
<i>Nov. 17</i>	8 0	45 Austr.
18	12 5'	1. 3
19	" 4"	1 18
20	22 45'	1 33
21	27 4'	1 44
22 m	2 4"	-55
23	" 5"	2 4
24	12 52'	12
25	17 45	15

Loca autem Cometæ iisdem horis in orbe Parabolico inventa ita se habent.

	Comet. Lon.	Com. Lat.
<i>Nov. 17</i>	8	45. 23 27
2	28	0. 1 21 2
25 m	3	1-2 6 2

Congruunt igitur observationes tam mense *Novembri*, quam mensibus tribus subsequenribus cum motu Cometæ circa *Solem* in Trajectoriâ hæc Parabolica, atque adeo hæc esse veram hujus Cometæ Trajectoriam confirmant. Nam differentia inter loca observata

servata & loca computata tam ex erroribus observationum quam ex erroribus operationum Graphicarum in Orbe definiendo admittit, facile oriri potuerit.

Cæteram Trajectoriam quam Cometa descripsit, & caudam veram quam singulis in locis projecit, vitam est annexo schemate in plano Trajectoriæ optice delineatas exhibere. observationibus sequentibus in cauda definienda attribitis.

Nov. 17. Cauda gradus amplius quindecim longa *Pontico* apparuit. Nov. 18. cauda 30 gr. longa. Solique directe opposita in *Notæ Angliæ* cernebatur, & protendebatur usque ad *stellam* γ , qui tunc erat in α 9 gr. 34. Nov. 19 in *Mary-Land* cauda vixit gradus 15 vel 20 longa. Dec. 10. cauda (observante *H. m. f. d. d. d.*) transibat per medium distantiam inter caudam serpentis *Ophiuchi* & *stellam* δ in *Aquilæ* australi ala, & desinebat prope *stellas* *A, u, b* in *Tabulis Bayeri*. Terminus igitur erat in α 19, cum lat. bor. 34' gr. circiter. Dec. 11. surgebat ad usque caput sagittæ (*Bayero, u. b.*) desinens in α 26 gr. 43 cum lat. bor. 38 gr. 34. Dec. 12. transibat per medium Sagittæ, nec longe ultra protendebatur, desinens in α 4°, cum lat. bor. 42', circiter. Intelligenda sunt hæc de longioris caudæ clarioris. Nam luce obscuriore, in cælo fortassis magis sereno, cauda Dec. 12. hora 5, 40 *Rome* (observante *Pontico*) supra *cygni Uropygium* ad gr. 10. sese extulit, atque ab hac stella ejus latus ad occiduum & boream min. 45. desinit. Lata autem erat cauda his diebus gr. 3 juxta terminum superiorem, ideoque mediam ejus distabat a stella illa 2 gr. 15 austrum versus, & terminus superior erat in α 22 gr. cum lat. bor. 61 gr. Dec. 21. surgebat tere ad caudam *Cassiopeiæ*, æqualiter distans a β & *Scheat*, & distantiam ab utraque distantiarum earum ab invicem æqualitatem habens, adeoque desinens in α 24 gr. cum lat. 47' gr. Dec. 29. tangebat *Scheat* lineam ad sinistram, & intervalum stellarum duarum in parte boreali *Andromedæ* accurate complebat, & longa erat 54 gr. adeoque desinebat in α 19 gr. cum lat. 35 gr. Jan. 5. tetigit stellam π in pectore *Andromedæ*, ad latus suum dextrum, & stellam μ in ejus cingulo ad latus sinistrum, & (juxta observationes nostras) longa erat

40 gr. curva autem erat & convexo latere spectabat ad austrum. Cum circulo per Solem & caput Cometæ transeunte angulum confect graduum 4 juxta caput Cometæ, ac juxta terminum alterum inclinabatur ad circulum illum in angulo 10 vel 11 grad. & chorda caudæ cum circulo illo continebat angulum graduum octo. Jan. 13. Cauda luce satis sensibili terminabatur inter *Alamrech* & *Algol*, & luce tenuissima delinebat e regione stellæ α in latere *Persei*. Distantia termini caudæ à circulo Solem & Cometam jungente erat 3 gr. 30, & inclinatio chordæ caudæ ad circulum illum 8, gr. Jan. 25 & 26 luce tenui micabat ad longitudinem graduum 6 vel 7, & ubi cælum valde serenum erat, luce tenuissima & ægerime sensibili attingebat longitudinem graduum duodecim & paulo ultra. Dirigebatur autem ejus axis ad Lucidam in humero orientali Aurigæ accurate, adeoque declinabat ab oppositione Solis Boream versus in angulo graduum decem. Denique Feb. 10. caudam oculis armatis alpegi gradus duos longam. Nam lux prædicta tenuior per vitra non apparuit. *Ponthaus* autem Feb. 7. se caudam ad longitudinem gr. 12. visisse scribit.

Orbem jam descriptum spectanti & reliqua Cometæ hujus Phænomena in animo revolvendi haud difficulter constabit quod corpora Cometarum sunt solida, compacta, fixa ac durabilia ad instar corporum Planetarum. Nam si nihil aliud essent quàm vapores vel exhalationes Terræ, Solis & Planetarum, Cometa hæc in transitu suo per viciniam Solis statim dissipari debuisset. Est enim calor Solis ut radiorum densitas, hoc est reciproce ut quadratum distantiae locorum a Sole. Ideoque cum distantia Cometæ a Sole Dec. 8. ubi in Perihelio vertabatur, esset ad distantiam Terræ a Sole ut 6 ad 1000 circiter, calor Solis apud Cometam eo tempore erat ad calorem Solis æstivæ apud nos ut 1000000 ad 36, seu 28000 ad 1. Sed calor aquæ ebullientis est quasi triplo maior quàm calor quem terra anda concepit ad æstivum Solem, ut expertus sum & calor ferri candentis (si recte conjector) quasi triplo vel quadruplo major quàm calor aquæ ebullientis, adeoque calor quem terra anda apud Cometam in perihelio versantem ex radius So-

Solaribus concipere posset, quasi 2000 vicibus major quam calor ferri candentis. Tanto autem calore vapores & exhalationes, omnisque materia volatilis statim consumi ac dissipari debuissent.

Cometa igitur in perihelio suo calorem immensum ad Solem concepit, & calorem illum diutissime conservare potest. Nam globus ferri candentis digitum unum latus, calorem suum omnem spatio horæ unius in aere consistens vix amitteret. Globus autem major calorem diutius conservaret in ratione diametri, propterea quod superficies (ad cuius menturam per contactum aeris ambientis refrigeratur) in illa ratione minor est pro quantitate materię suę calidę inclusę. Ideoque globus ferri candentis huic Terrę æqualis, id est pedes plus minus 40000000 latus, diebus eodem, & ideoque annis 30000, vix refrigeraret. Suspicio tamen quod duratio Caloris ob causas latentes augeatur in minore ratione quam ea diametri. & optatam rationem veram per experimenta investigari.

Porro notandum est quod Cometa Mense *Decembri*, ubi ad Solem modo incaluerat, caudam emittebat longe maiorem & splendidiorem quam antea Mense *Novembri*, ubi perihelium nondum attingerat. Et universaliter caudę omnes maximę & fulgentissimę e Cometis oriuntur, statim post transitum eorum per regionem Solis. Conducit igitur calefactio Cometę ad magnitudinem caudę. Et inde colligere videor quod cauda nihil aliud sit quam vapor longe tenuissimus, quem caput seu Nucleus Cometę per calorem suum emittit.

Cæterum de Cometarum caudis triplex est opinio, eas vel jubar esse Solis per translucentia Cometarum capita propagatum, vel ori ex refractione lucis in progressu ipsius à capite Cometę in Terram vel denique nubem esse seu vaporem a capite Cometę jugiter surgentem & abeuntem in partes a Sole aversas. Opinio prima eorum est qui nondum imbuti sunt scientia rerum opticarum. Nam jubar Solis in cubiculo tenebroso non cernitur nisi quatenus lux reflectitur è pulverum & fumorum particulis per ætherem semper volitantibus: adeoque in aere fumus crassioribus infecto splendidius est, & sentum

fortius ferit, in aere clariore tenuius est & æquius sentitur: in cæcis
autem abique materia reflectente nullum esse potest. Lux non
cernitur quatenus in nubare est, sed quatenus inde reflectitur ad
oculos nostros. Nam visio non fit nisi per radios qui in oculos
impingunt. Requiritur igitur materia aliqua reflectens in regione
Caudæ, ne cælum totum luce Solis illustratum uniformiter perpen-
deat. Opinio secunda magis premittitur a fidei rationibus. Caudæ nan-
quam variegantur coloribus: qui tamen refractionem sciunt esse
comites in i parables. Lux fixarum & Planetarum diu nocte ad nos
transmissa demonstrat medium cæleste nulla vi refractiva polere.
Nam quod dicitur fixas ab *Ægyptiis* comatas nonnunquam videri
fuisse, id quoniam rarissime contingit, attribuendum est nubium re-
fractioni torquentæ fixarum quoque radiatio & scintillatio ad refra-
ctiones cum Oculorum tum aeris tremuli referendæ sunt: quæ ipse
quæ & admodis oculis Telescopis evanescunt. Aeris & ascendentium
vaporum tremore fit ut radii facile de angusto pupilli spatio per vi-
ces detorqueantur, de latiore autem vtri objectivi apertura neuti-
quam. Inde est quod scintillatio in priori casu generetur, in po-
steriore autem cesset & cessatio in posteriore casu demonstrat re-
gularem transpositionem lucis per cælos ab qua omni refractione ten-
tibus. Nequis contendat quod caudæ non soleant videri in Come-
tis cum eorum lux non est satis fortis, quia tunc radii secundarii
non habent satis viam ad oculos movendos, & propterea caudas
fixarum non cernunt. Idem est quod lux fixarum plus centum vi-
cibus atgeri potest medianibus Telescopis, nec tamen caudæ cer-
nuntur. Planetarum quoque lux etiam prior est, caudæ vero nulla.
Cometæ autem sæpe caudatissimi sunt, ubi caput lux tenuis est
& valde obtusa: sic enim Cometa Anni 1680, Mense Decembris,
quo tempore caput luce sua vix æquabat stellas secundæ magnitu-
dinis, caudam emittebat splendore notabili usque ad gradus 40, 50,
60 longitudo & ultra postea Jan. 17 & 18 caput apparebat ut
stella septimæ tantum magnitudinis, cauda vero luce quædam per-
tenuis sed satis tenuis & longa erat 6 vel 7 gradus, & luce obcurissima,
quæ

quæ cerni vix posset, porrigebatur ad gradum usque duodecimum vel paulo ultra ut supra dictum est. Sed & Feb 9 & 10 ubi caput nudis oculis videri desierat caudam gradus duos longam per Telescopium contemplatus sum. Porro si cauda oriretur ex rei actione mater æ celestis & pro figura ætherum deflecteretur de Solis oppositione, deberet deflexio illa in eadem cœli regionibus in eandem semper partem fieri. Atqui Cometa Anni 1680 Decemb. 28 hora 8, P. M. Londin, versabatur in $\approx 8^{\circ} 41'$ cum latitudine boreali $28^{\circ} 6'$, Sole exiiente in $\approx 18^{\circ} 26'$. Et Cometa Anni 1577 Dec. 29. versabatur in $\approx 8^{\circ} 41'$ cum latitudine boreali $28^{\circ} 40'$. Sole etiam exiiente in $\approx 18^{\circ} 26'$ circiter. Utroque in casu Terra versabatur in eodem loco & Cometa apparebat in eadem cœli parte, in priori tamen cœli cauda Cometæ (ex meis & aliorum observationibus) declinabat angulo graduum 4' ab oppositione Solis Aquilonem versus, in posteriore vero (ex Observationibus Tycho) declinatio erat graduum 21 in austrum. Igitur repudata cœlorum refractione, superest ut Phænomena Caudarum ex materia aliqua reflectente deriventur.

Caudas autem à caputibus omni & in regiones à Sole aversas ascendere confirmatur ex legibus quas observant. Ut quod in planis orbium Cometarum per Solem transeuntibus præterea, deviant ab oppositione Solis in eas semper partes quas capita in orbitis illis progredientia relinquunt. Quod spectatori in his planis constituto apparent in partibus à Sole directe aversis, & egrediente autem spectatore de his planis, deviatio paulatim lentam, & indies apparet major. Quod deviatio cæteris paribus minor est ubi cauda obliquior est ad orbem Cometæ, ut & ubi caput Cometæ ad Solem propius accedit, præterea si spectetur deviatio angulus juxta caput Cometæ. Præterea quod caudæ non deviantes apparent rectæ, deviantes autem incurvantur. Quod curvatura major est ubi major est deviatio, & magis sensibilis ubi cauda cæteris partibus longior est nam in brevioribus curvatura æque adinvenitur. Quod deviationis angulus minor est juxta caput Cometæ, major juxta caudæ extre-

extremam alteram, atque adeo quod cauda convexo sui latere partes respicit à quibus fit deviano, quæque in rectâ sunt lineâ a Sole per caput Cometæ in infinitum ducta. Et quod caudæ quæ prolixiores sunt & satiores, & luce vegetiore micant, sint ad latera convexa paulo splendiores & limite minus indistincto terminantur quam ad concava. Pendent igitur Phænomena caudæ à motu capitis, non autem à regione cæli in qua caput conspicitur, & propterea non sunt per retractionem cælorum, sed à capite suppeditante materiam oriuntur. Etenim ut in aere nostro fumus corporis cuiusvis ignis petit superiora, idque vel perpendiculariter si corpus quiescat, vel oblique si corpus moveatur in latus, ita in cælis ubi corpora gravitant in Solem, fumi & vapores ascendere debent à Sole (ut jam dictum est) & superiora vel rectâ petere, si corpus fumans quiescat, vel oblique, si corpus progrediendo loca semper desent à quibus superiores vapores partes ascenderant. Et obliquitas ista minor erit ubi ascensus vaporis velocior est: nimirum in vicinia Solis & juxta corpus fumans. Ex obliquitatis autem diversitate incurvabitur vaporis columna: & quia vapor in columnæ latere præcedente paulo recentior est, ideo etiam is ibidem aliquanto densior erit, lucemque propterea copiosius reflectet, & limite minus indistincto terminabitur. De caudarum agitationibus sub tantis & incertis, deque earum figuris irregularibus, quas nonnulli quandoque describunt, hic nihil adjicio, propterea quod vel à mutationibus aeris nostri, & motibus nubium causas à qua ex parte obscurantur oriuntur, vel forte à partibus Vix Lactææ, quæ cum caudis prætereuntibus contundi possint, ac tanquam earum partes spectant.

Vapores autem, qui spatium tam immentis implendis sufficiant, ex Cometarum Atmosphæris oriri posse, intelligetur ex raritate aeris nostri. Nam aer juxta superficiem Terræ spatium occupat quasi 850 viribus majus quam aqua ejusdem ponderis, ideoque aeris columna Cylindrica pedes 850 alta ejusdem est ponderis cum aquæ columna pedali latitudinis ejusdem. Columna autem aeris ad immutatem Atmosphære assurgens æquat pondere suo columnam æquæ
pedes

pedes 33 altam circiter, & propterea si columnæ totus aeris pars inferior pedum 850 altitudinis dematur, pars vel quæ superior æqualit pondere suo columnam aquæ altam pedes 32. Inde vero ex Hypothesi multis experimentis confirmata, quod compressio aeris sit ut pondus Atmosphæræ incumbens, quodque gravitas sit reciproce ut quadratum distantie locorum a centro Terræ) computatum est per Corol. Prop. XXII Lib II in eundo, inveniri quod aer, si ascendatur a superficie Terræ ad altitudinem semidiametri unius terrestris, rarior sit quam apud nos in ratione longe maiori, quam spatii omnis infra orbem Saturni ad globum diametro digni unius descriptum. Ideoque globus aeris nostri dignum unam partem, ea cum raritate quam haberet in altitudine semidiametri unius terrestris, impleteret omnes Planetarum regiones ad usque sphaeram Saturni & longe ultra. Proinde cum aer adhuc altior in immentum raret, & cona seu Atmosphæra Cometæ, ascendendo ab illius centro, quasi decuplo altior sit quam superficies nuclei, deinde cauda adhuc altius ascendat, debet cauda esse quam rarissima. Et quavis, ob longe crassiorem Cometarum Atmosphæram, magnamque corporum gravitationem Solem versus, & gravitationem particularum Aeris & vaporum in se mutuo, fieri possit ut aer in spatii celestibus inque Cometarum caudis non adeo raret, perexiguam tamen quantitatem aeris & vaporum ad omnia illa caudarum phænomena abunde sufficere ex hac computatione percipitur est. Nam & caudarum ingens raritas colligitur ex aliis per eas transluentibus. Atmosphæra terrestris luce Solis splendens, crassitudine sua paucorum miliarum, & astra omnia & ipsam Lunam obscurat & extinguit penitus: per immentam vero caudarum crassitudinem, luce pariter Solari illustratam, astra minima atque clancatis detrimendo transluere non videntur. Neque major esse solet caudarum per mirum splendor, quam aeris nostri in tenebroso cubiculo attente digni unius duorumve, lucem Solis in iube reflectentis.

Quo tempore vapor a capite ad terminum caudæ ascendit, cognosci se potest ducendo rectam a termino caudæ ad Solem, & no-

tando locum ubi recta illa Trajectoria secat. Nam vapor in termino caudæ, si recta ascendat a Sole, ascendere capit a capite quo tempore caput erat in loco intersectionis. At vapor non recta ascendit a Sole, sed motum Cometæ, quem ante ascensum suum habebat, retinendo, & cum motu ascensus sui eundem componendo, ascendit oblique. Unde verior erit Problematis solutio, ut recta illa quæ orbem tangit, parallela sit longitudini caudæ, vel potius (ob motum curvilineum Cometæ) ut eadem a linea caudæ divergat. Hoc pacto inveni quod vapor qui erat in termino caudæ Jan. 25. ascendere coepit a capite ante Decemb. 11. adeoque altitudo sua toto dies plus 45 consumpserat. At cauda una omnis quæ Dec. 10. apparuit, ascenderat spatio dictum illorum duorum, qui à tempore perihelii Cometæ elapsi fuerant. Vapor igitur sub initio in vicina Solis celerrime ascendebat, & postea cum motu per gravitatem suam semper retardato ascendere pergebat, & ascendendo augebat longitudinem caudæ. Cauda autem quamdiu apparuit ex vapore fere omni consistebat qui a tempore perihelii ascenderat; & vapor, qui primus ascendit, & terminum caudæ composuit, non prius evanuit quam ob nimiam suam tam à Sole illustrante quam ab oculis nostris distantiam videri desit. Unde etiam caudæ Cometarum aliorum quæ breves sunt, non ascendunt motu celeri & perpetuo a capitibus & mox evanescent, sed sunt permanentes vaporum & exhalationum columnæ a capitibus lentissimo multorum dierum motu propagatæ, quæ, participando motum illum capitum quem habuere sub initio, per coelos una cum capitibus moveri pergunt. Et hinc rursus colliguntur spacia celestia vi resistendi destituta, utpote in quibus non solum solida Planetarum & Cometarum corpora, sed etiam rarissimi caudarum vapores motus suos velocissimos liberrime peragunt ac diutissime conservant.

Ascensum caudarum ex Atmosphæris capitum & progressum in partes a Sole averlas *Aetherius* attribuit actioni radiorum lucis materiam caudæ secum rapientium. Et auram longe tenuissimam in spatis ætheris actioni radiorum cedere, non est a ratione prolius
 ætherem

alienum, non obstante quod substantiæ crassæ, impedirentur in regionibus nostris, à radiis Solis sensibilibus propelli nequeant. Alius particulas tam leves quam graves dari posse existimat, & materiam caudarum levitare, perque levitatem suam à Sole ascendere. Cum autem gravitas corporum terrestrium sit ut materia in corporibus, ideoque servata quantitate materiæ intendi & remitti nequeat, suspicor ascensum illum ex rarefactione materiæ caudarum potius oriri. Ascendit fumus in camino impellu aeris cui innatat. Aer ille per calorem rarefactus ascendit, ob diminutam suam gravitatem specificam, & fumum implicatum rapit secum. Quidni cauda Comete ad eundem modum ascenderit a Sole. Nam radii Solares non agitant Media quæ permeant, nisi in reflexione & retractione. Particulæ reflectentes ea actione calefactæ calefaciunt auram ætheream cui implicantur. Illa calore sibi communicato rarefit, & ob diminutam ea raritate gravitatem suam specificam qua prius tendebat in Solem, ascendit & secum rapit particulas reflectentes ex quibus cauda componitur. Ad ascensum vaporum conducit etiam quod hi gyranur circa Solem & ea actione conantur a Sole recedere, ac Solis Atmosphæra & materia ætherum vel plane quietat, vel motu solo quem à Solis rotatione acceperint, tardius gyrat. Hæc sunt causæ ascensus caudarum in vicinia Solis, ubi orbis curviores sunt, & Comete intra densiorem & ea ratione graviorem Solis Atmosphæram consistunt, & caudas quam longissimas mox emittunt. Nam caudæ quæ tunc nascuntur, conservando motum suum & interea versus Solem gravitando, movebuntur circa Solem in Ellipsis pro more capitum, & per motum illum capita semper comitabuntur & eis liberrime adhaerebunt. Gravitatis enim vaporum in Solem non magis efficiet ut caudæ postea decedant a capitibus Solem versus, quam gravitas capitum efficere possit ut hæc decedant a caudis. Comuni gravitate vel simul in Solem cadant, vel simul in ascensu suo retardabuntur, adeoque gravitas illa non impedit, quo minus caudæ & capita positionem quamcumque ad invicem a causis jam descriptis aut aliis quoviscumque facillime accipiant & postea liberrime servant.

Caudæ igitur quæ in Cometarum perihelis nascuntur, in regiones longinquas cum eorum capitibus abibunt, & vel inde post longam annorum senectem cum autem ad nos redibunt, vel potius ibi rarefacti paulatim evanescent. Nam postea in descensu capitum ad Solem caudæ novæ breviusculæ lento motu à capitibus propagari debebunt, & tandem, in Perihelis Cometarum illorum quæ ad usque Atmosphæram Solis descendunt, in immensum augeri. Vapor enim in spaciis illis liberrime perpetuo rarefit ac dilatur. Quia ratione fit ut cauda omnis ad extremitatem superiorem latior sit quam juxta caput Cometæ. Ea autem rarefactione vaporem perpetuo dilatatum diffundi tandem & spargi per cælos universos, deinde paulatim in Planetas per gravitatem suam attrahi & cum eorum Atmosphæris misceri rationi consentaneum videtur. Nam quemadmodum Maria ad constitutionem Terræ hujus omnino requiruntur, idque ut ex eis per calorem Solis vapores copiose latus excitentur, qui vel in nubes coacti decidunt in pluvias, & terram omnem ad procreationem vegetabilium irrigant & nutriunt, vel in frigidis montium verticibus condensati (ut aliqui cum ratione philosophantur) decurrant in fontes & flumina: sic ad conservationem marium & humorum in Planetis Cometæ requiri videntur, ex quorum exhalationibus & vaporibus condensatis, quæquid liquoris per vegetationem & putrefactionem consumitur & in terram aridam convertitur, continuo suppleri & rebus possit. Nam vegetabilia omnia ex liquoribus omnino crescunt, dein magna ex parte in terram aridam per putrefactionem abeunt, & iterum ex liquoribus putrefactis perpetuo decidunt. Hinc moles Terræ aridæ indices augetur, & liquores, nisi aliunde augmentum sumerent, perpetuo decrescere deberent, ac tandem delecte. Porro suspicor ipsum illum, qui aeris nostræ pars minima est sed subtilissima & optima, & ad rerum omnium vitam requiritur, ex Cometis præcipue venire.

Atmosphære Cometarum in descensu eorum in Solem excurrendo in caudas diminuuntur, & (ea certe in parte quæ Solem respiciunt)

(spicit) angustiores redduntur. & vicissim in recessu eorum a Sole, ubi jam minas excurrunt in caudas, ampliantur; si modo Phænomena eorum *Hevelius* recte notavit. Minus autem apparent ubi capita jam modo ad Solem cuncta in caudas maximas & fulgentissimas abiere, & nuclei fumo fortan crassiore & nigriore in Atmosphærarum partibus infinis circundantur. Nam fumus omnis ingenti calore excitatus crassior & nigrior esse solet. Sic caput Comete de quo egimus, in æqualibus a Sole ac Terrâ distantis, obturatus apparuit post perihelium suum quam antea. Mensis enim Decem cum stellis tertie magnitudinis contemni solebat, ac Mensis Novem. cum stellis primæ & secundæ. Et qui utrinq; viderant, maiorem describunt Cometam priorem. Nam Juveni cuidam *Canabrigiensi* Novem. 19. Cometa hæc luce sua quantumvis plumbea & obtrusa æquabat Spicam Virginis, & clarius micabat quam postea. Et D. Storer literis quæ in manus nostras incidere, scripsit caput ejus Mensis Decembris, ubi caudam maximam & fulgentissimam emittebat, parvum esse & magnitudine visibili longe cedere Cometæ qui Mensis Novembris ante Solis ortum apparuerat. Cujus rei rationem esse conjectabatur quod materia capitis sub initio copiosior esset & paulatim consumeretur.

Eodem spectare videtur quod capita Cometarum aliorum, qui caudas maximas & fulgentissimas emiserunt, describantur subobscura & exigua. Nam Anno 1668 Mart. 5. Sc. nov. hora septima Vesp. R. P. *Valerius Hylancus*, Brasiliæ agens, Cometam vidit Horizonti proximum ad occasum Solis brumalem, capite minimo & vix conspicuo, cauda vero supra modum fulgente, ut stantes in litore speciem ejus e mari reflexam facile cernerent. Spectum utique habebat trabis splendens longitudine 23 graduum, ab occidente in austrum vergens, & Horizonti fere parallelæ. Tantis autem splendore tres solum dies durabat, subinde notabiliter decrescens, & interea decrescente splendore aucta est magnitudine cauda. Unde etiam in *Portugallia* quartam fere cæli partem (id est gradus 45) occupasse dicitur, ab occidente in orientem splendore cum insigni pro-

tenia, nec tamen tota apparuit, caput semper in his regionibus intra Horizontem deluescente. Ex hac enim causa & decessimento splendoris manifestum est quod caput a Sole recessit, eique proximum fuit sub initio, pro more Cometarum anni 1680. Et similes legitur Cometa anni 1101 vel 1106, cuius Stella erat parva & obscura (ut ille anni 1680) sed splendor qui ex ea exivit valde clarus & quasi ingens trabs ad orientem & Aquilonem tendebat, ut habet Hevelius ex Simeone Duno in eisdem Monachis. Apparuit initio Mensis Feb. circa vesperam ad occidentem Solis brumalem. Inde vero & ex hac cauda colligitur caput fuisse Soli vicinum. A Sole, inquit Matthæus Parvius, distabat nisi ex toto uno, ab hora tertia (rectius sexta) usque ad horam nonam rationem ex se longum emittens. Talis etiam erat ardentissimus, ut Cometa ab Aristotele descriptus Lib. I. Meteor. 6. cuius caput prius die non conspicuum est, eo quod ante Solem vel satem sub radiis solaribus occidisset, sequente vero die quantum potuit visum est. Nam quam minima fieri potest distantia Solem reliquit, & mox occubuit. Ob immensum ardorem cauda scilicet nonnullum apparebat caput sparsus ignis, sed procelente tempore (ait Aristoteles) cum [cauda] jam minus flagraret, rediit ad caput Cometa sua facies. Et splendorem suum ad terram usque, ut ait parvius, usque est ad 60 gr. extendit. Apparuit autem tempore hybernico, & ad orientem usque ad equatorem Orionis ibi evanuit. Cometa ille anni 1618, qui e radiis solaribus candidissimus emerit, stellis primæ magnitudinis æquate vel paulo superare videbatur, sed maiores apparuit Cometæ non pauci quæ caudas breviores habuerunt. Horum aliqui Jovem, alii Venere, vel etiam Lunam æquasse traduntur.

Diximus Cometæ esse genus Planetarum in Orbibus valde eccentricis circa Solem revolventium. Et quemadmodum & Planetæ in caudatis, minores esse solent qui in orbibus minoribus & Soli propriis gyranter, sic etiam Cometæ, qui in Periheliis suis ad Solem propius accedunt, ut parvius minores esse & in orbibus minoribus revolvantur rationi consentaneum videtur. Orbium vero transversas diametros & revolutionum tempora periodica ex collatione Co-

metarum in se in orbibus, post longa temporum intervalla redeuntium determinanda reliquo. Hactenus hanc negotio Propositio sequens Lumen suum esse potest.

Prop. XLII. Prob. XXI.

Trajectoriam Cometæ graphice inventam corrigere.

Oper. 1. Assumatur posito plani Trajectoræ, per Propositionem superiorem graphice inventa, & seligantur tria loca Cometæ observationibus accuratissimis detecta, & ab invicem quam maxime distantia, sitque *A* tempus inter primam & secundam, ac *B* tempus inter secundam ac tertiam. Cometam autem in eorum aliquo in Perigæo versari convenit, vel saltem non longe a Perigæo adesse. Ex his locis apparentibus inventantur per operationes Trigonometricas loca tria vera Cometæ in assumpto illo plano Trajectoræ. Deinde per loca illa inventa, circa centram Solis seu umbilicam, per operationes Arithmeticas, ope Prop. XXI. Lib. I. institutas, determinatur Sectio Conica & ejus area, radius a Sole ad loca inventa ductus terminatae, suntque *D* & *E*, nempe *D* area inter observationem primam & secundam, & *E* area inter secundam ac tertiam. Si que *T* tempus totum quo area tota *D* + *E*, velocitate Cometæ per Prop. XVI. Lib. I. inventa, describi debet.

Oper. 2. Augeatur longitudo Nodorum Plani Trajectoræ, additis ad longitudinem illam 20 vel 30, quæ dicantur *P*, & tervetur plani illius inclinatio ad planum Eclipticæ. Deinde ex prædictis tribus Cometæ locis observatis inventantur in hoc novo plano loca tria vera (ut supra) deinde etiam orbis per loca illa transiens, & eundem areae duæ inter observationes descriptæ, quæ sint *d* & *e*, nec non tempus totum *t* quo area tota *d* + *e* describi debeat.

Oper. 3. Servetur Longitudo Nodorum in operatione prima, & augeatur inclinatio Plani Trajectoræ ad planum Eclipticæ, additis ad inclinationem illam 20 vel 30, quæ dicantur *Q*. Deinde ex observationibus

servatis prædictis tribus Cometæ locis apparentibus, inveniantur in hoc novo Plano loca tria vera, Orbisque per loca illa transiens, ut & ejusdem areæ dux inter observationes descriptæ, quæ sint δ & ϵ , & tempus totum τ quo area tota $\delta + \epsilon$ describi debeat.

Jam sit C ad 1 ut A ad B , & G ad 1 ut D ad E , & g ad 1 ut d ad e , & γ ad 1 ut δ ad 1 ; sitque S tempus verum inter observationem primam ac tertiam; & signis $+$ & $-$ probe observatis quarantur numeri m & n , ea lege ut sit $G - C = mG - mg + nG - n\gamma$, & $T - S$ æquale $mT - m\tau + nT - n\tau$. Et si, in operatione prima, I designet inclinationem plani Trajectoriæ ad planum Eclipticæ, & K longitudinem Nodi alterutrius: erit $I + nQ$ vera inclinatio Plani Trajectoriæ ad Planum Eclipticæ, & $K + mP$ vera longitudo Nodi. Ac denique si in operatione prima, secunda ac tertia, quantitates R , r & p designent Latera recta Trajectoriæ, & quantitates $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{l}$, $\frac{1}{\lambda}$ ejusdem Latera transversa respectivè: erit $R + m\tau - mR + n\tau - nR$ verum Latus rectum, & $\frac{L + m\tau - m\lambda + n\lambda - nL}{L + m\tau - m\lambda + n\lambda - nL}$ verum Latus transversum Trajectoriæ quam Cometa describit. Dato autem Latere transverso datur etiam tempus periodicum Cometæ. Q, E, I

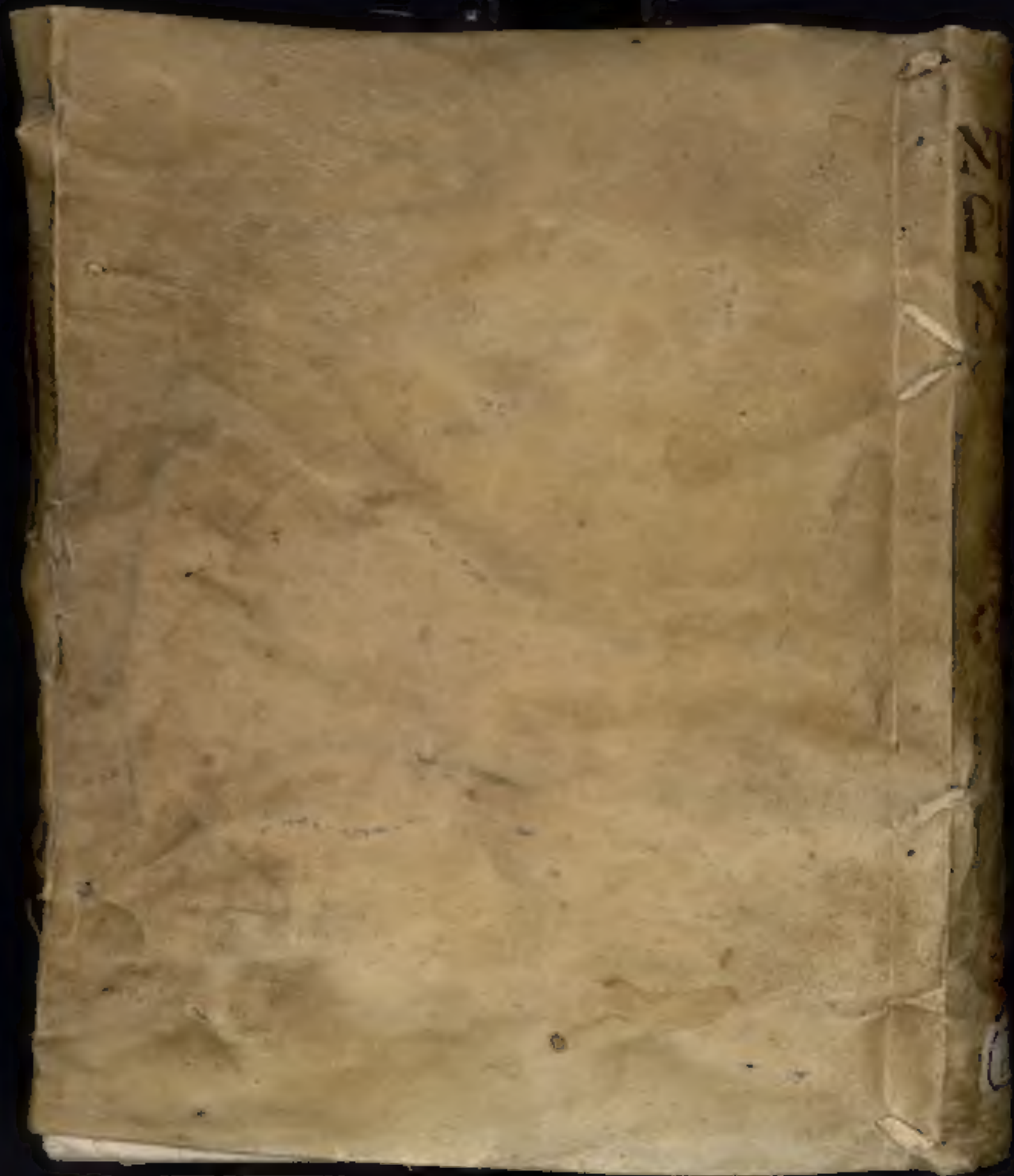
F I N I S.

Errata Sensum turbantia sic Emenda.

Pag. 14 lin. 30 lege. ut OK ad OD seu OL. p. 13 L. 1 recta. p. 61 L. 22
 & p. 62 L. 2 pro A Clege AB. p. 81 L. 1. crurum BL, CL vel BM,
 CM intersectio, quæ jam sit in, incidat semper in rectam illam infinitam MN,
 & crurum BA, CA &c. p. 84 L. 17 post verba Nam si lege A & P sint Puncta
 contactuum ubi vis in tangentibus sita, & p. 91 L. ult. ML, LK. p. 95 L. 3 post
 majori adde, & perpendicularia minori. p. 95 L. 30 & 31 lege ABC def,
 & L. 32 abc DEF. p. 101 L. 16 pro GOq. + HG - POq. lege
 HPq. = GOq. + PO - HG q. p. 105 L. 7 pro G scribe H. p. 118 L. 17
 pro C Plege Pf B & L. 19 pro C Plege BP. p. 121 L. 28, pro L scribe M.
 p. 123 L. 13, pro DF lege DF vel EG. p. 125 L. 16 pro omnibus altitudi-
 nibus, lege omnibus aequalibus altitudinibus. p. 152 L. 7 per cujus. p. 153 L. 16
 & LG. p. 178 L. penult. sit quasi duplo major quam. p. 209 L. 18 pro SL
 x SI¹, lege SLx SI¹. p. 226 L. 11 pro 2 B² seu $\frac{2}{B \cos}$ lege 2 B' & de-
 le reciproc.

Pag. 241 lin. 2, & p. 262 L. 13, & p. 336 L. 5, pro Q. E. D. lege Q. E. L.
 p. 241 L. 10 2 CDq. x QB. p. 246 L. 14 proportionalia. p. 249 L. 12 resi-
 stentia & tempus. p. 250 L. 1 -rum inverse, amittent. q. 277 L. 4 praterit,
 si modo Sellorem tangentes Ap & AP sint ut velocitates. p. 274 L. 17 data
 quadam. p. 283 L. ult. TQ x PS. p. 296 in Schemate pro O scribe T. p. 307
 L. 9 arcus auferantur. p. 312 L. 26 corpus in D. p. 313 L. 3 Describit. p. 314
 L. 21 & 28, pro a B K k S lege a B K k T. p. 325 L. 26 B E ad BC. ib.
 L. ult. aequalis $\frac{BE \text{ quad.}}{CB}$ p. 38 L. 29 & longitudo CZ.

Pag. 411 L. 27 plusquam duplicata, per Prop. LXXXI Lib. I p. 413 L. 28
 116. p. 416 L. 17 116. p. 431 L. 9 aquales pertinentiam p. 442 L. 11 6914
 ad 6811. ib. L. 18 6811 ad 6911. p. 449 L. 5 circa p Ddm p. 450 L. 9 ad a-
 ream DPMd. p. 455 L. 30 motum posteriorem. p. 459 L. 2 2MPx ATgu.
 p. 482 L. 3 dein b - ab = c &c. & sic pergatur ad differentiam ultimam, quæ
 hic est f. ib. in Schemate infra d ad 3d scribe f^2 p. 494 L. 4 pro a 27
 lege 1 27.



NEWTON

Philosophiæ

Naturalis

Principia

Mathematicæ

Secundæ

Editiō

1687

1689

1693

1696

1699

1704